4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

5. О л о н и ч е в П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. ДАН СССР, т.80, №2, 1951, с.165-168.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 10 1979

УДК 513.73

Л.В. С б и т н е в а

СОВЕРШЕННЫЕ S – СТРУКТУРЫ

Цель настоящей работы – найти необходимые и достаточные условия на структуру геоодуля канонической редуктивной связности касательно-регулярной S – структуры /в частности, симметрического пространства/.

I. Левая квазигруппа это алгебра $\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ с двумя бинарными операциями – умножением $\cdot$ и левым делением $\backslash$ – и тождествами $x\backslash(x\cdot y)=y$, $x\cdot(x\backslash y)=y$. /1/

Если ещё имеется бинарная операция правого деления $/$ и выполняются тождества $(x\cdot y)/y=x$, $(x/y)\cdot y=x$, /2/

то алгебра $\langle M,\cdot,\backslash,/\rangle$ называется квазигруппой /см. 10 /. Левая квазигруппа $(\mathcal{L}.Q.)$ /квазигруппа $(Q.)$/ называется леводистрибутивной $(\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D},\mathcal{L},Q.)$, если имеет место тождество

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z). \qquad /3/$$

Левая квазигруппа /квазигруппа/ идемпотентна $(\mathcal{Id},\mathcal{L},Q.)$, если

$$x\cdot x=x. \qquad /4/$$

Введём левые и правые сдвиги в квазигруппе $/\mathcal{L}.Q./$

$$S_x y \overset{def}{=} x\cdot y,\quad \tau_y x \overset{def}{=} x\cdot y. \qquad /5/$$

<u>Определение I.</u> Гладкая $\mathcal{Id}.\mathcal{L}.Q.\langle M,\cdot,\backslash\rangle$ называется гладкой S – структурой многообразия M, если $\forall x\in M\ \exists$ её окрестность U_x такая, что $x\cdot y=y\Rightarrow y=x$ для $\forall y\in U_x$.

M при этом называют S - многообразием.

Замечание. Под гладкостью понимаем C^∞ /или C^ω / гладкость; операции в гладкой квазигруппе считаются C^∞ / C^ω / гладкими. Последнее требование означает, что в достаточно малой окрестности любой точки x S_x имеет единственную неподвижную точку x .

Определение 1 /в других терминах/ см. в [1],[2] .

Определение 2. S - структура $\langle M, \cdot, \backslash \rangle$ - регулярна, если $\langle M, \cdot \rangle$ леводистрибутивна. M при этом называют регулярным S - многообразием.

Замечание. Это понятие введено в [3],[4] в других терминах, а в [5] изучено понятие касательно-регулярной S-структуры.

Определение 3. Касательно-регулярной S - структурой многообразия M называется идемпотентная леводистрибутивная гладкая левая лупа $\langle M, \cdot, \backslash \rangle$ такая, что $(S_x)_{*x}$ не имеет неподвижных векторов, кроме нуля /т.е. $(S_x)_{*x} - (id)_{*x}$ - невырожденное отображение $T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$.

2. Определение 4. Гладкая S - структура $\langle M, \cdot, \backslash \rangle$ называется: 1/ локально правильной, если для $\forall a \in M$ $\exists$ окрестность $U_a \ni a$ такая, что τ_a есть диффеоморфизм U_a и $\tau_a(U_a)$, /т.е. τ_a - локальный диффеоморфизм, или - локально обратим вблизи a /.

2/ глобально-правильной, если τ_a - диффеоморфизм для $\forall a \in M$ $(\tau_a x = x \cdot a)$.

Предложение I. Гладкая S - структура касательно-регулярна, если и только если она регулярна и локально правильна.

3. Введём теперь понятие локальной S- структуры многообразия.

Определение 5. Будем говорить, что на гладком многообразии M определена гладкая локальная левая квазигруппа $\langle U_\varepsilon, \cdot, \backslash \rangle$ /соотв. квазигруппа $\langle U_\varepsilon, \cdot, \backslash, / \rangle$ с центром в точке ε , если U_ε - открытая окрестность точки ε и определены гладкие отображения $U_\varepsilon \times U_\varepsilon \ni (x,y) \xrightarrow{\varphi} x \cdot y \in M$,

$U_\varepsilon \times U_\varepsilon \ni (x,y) \xrightarrow{\psi} x \backslash y \in M$ /а в случае квазигруппы еще и $U_\varepsilon \times U_\varepsilon \ni (x,y) \xrightarrow{\chi} x / y \in M$ / такие, что выполняются всюду, где левые и правые части имеют смысл, тождества $x \backslash (x \cdot y) = y$, $x \cdot (x \backslash y) = y$ /дополнительно $(x \cdot y)/y = x$, $(x/y) \cdot y = x$ в случае квазигруппы/.

Определение 6. Покрытие $\{\langle U, \overset{(U)}{\cdot}, \overset{(U)}{\backslash} \rangle\}$ многообразия M гладкими локальными $\mathcal{L}.Q.$ /или $Q.$ / назовем согласованным, если для $\forall U', U'' \in \{U\}$ операции умножения и деления относительно U' и U'' соответственно совпадают на $U' \cap U''$, т.е. $x, y \in U' \cap U'' \Rightarrow x \overset{(U')}{\cdot} y = x \overset{(U'')}{\cdot} y$, $x \overset{(U')}{\backslash} y = x \overset{(U'')}{\backslash} y$ /и в случае квазигрупп еще $x \overset{(U')}{/} y = x \overset{(U'')}{/} y$/.

Согласованное гладкое левоквазигрупповое /квазигрупповое/ покрытие будем называть левоквазигрупповым /квазигрупповым/ атласом /или $\mathcal{L}.Q.$ - атласом / Q - атласом// на многообразии M . Очевидным образом вводится понятие эквивалентных квазигрупповых атласов и максимального $Q.$ атласа.

Определение 7. Многообразие вместе с максимальным $\mathcal{L}.Q.$ - атласом / $Q.$ атласом/ назовем $\mathcal{L}.Q.$ - структурой /соотв. $Q.$ - структурой/.

Определение 8. Если все квазигруппы $Q.$ - атласа идемпотентны и леводистрибутивны, то будем говорить об идемпотентном леводистрибутивном $Q.$ - атласе / $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ - атлас/. Многообразие M с полным $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ атласом назовем $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структурой.

Замечание 1. Очевидно, локально-правильная регулярная - структура есть $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q$ - структура /но не наоборот/, откуда, в силу предложения 1, следует что касательно-регулярная S - структура есть $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$- структура.

Замечание 2. Понятие $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$- структуры есть локальная версия понятия регулярной локально-правильной S-структуры.

4. Будем рассматривать теперь $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$- структуры. Фиксируя /призвольно/ $\varepsilon \in M$ и вводя $S_\varepsilon = S$, $\tau_\varepsilon = \tau$, можно рассмотреть главный изотоп [10] локальной квазигруппы $\langle U_\varepsilon, \cdot, \backslash, / \rangle$ $\mathcal{Id}.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ атласа /локально, в окрестности

точки ε / $x\circ y \overset{def}{=} r^{-1}x\cdot s^{-1}y.$ /6/

Это – локальная лупа с нейтральным элементом ε.

Введём еще левые и правые сдвиги

$$L_x y \overset{def}{=} x\circ y, \qquad R_y x \overset{def}{=} x\circ y. \qquad /7/$$

Семейство локальных луп вида /6/ $\{<U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon>\}$ образует открытое покрытие многообразия M. Это – частный случай одулярной структуры на многообразии M /см.[9]/.

<u>Определение 9.</u> Назовем такую одулярную структуру главноизотопной для $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q$ = структуры.

<u>Предложение 2.</u> Лупа $<U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon>$ /см. /6// главноизотопная локальной $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.$ квазигруппе $<U_\varepsilon, \cdot, \backslash, />$ – специальная, т.е. $L^{-1}_{x\circ y}L_x L_y$ – автоморфизмы.

<u>Предложение 3.</u> Одулярная структура $\{<U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon>\}$ главноизотопна $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структуре $\{<U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\cdot}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/}, >\}$, если и только если

/1/ $z \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} (u \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} (s_\varepsilon z \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash} w)) = (z \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} (u \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} s_\varepsilon z^{-1})) \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} w,$

где $s_\varepsilon \in Aut <U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon>$ такой, что $s_\varepsilon x = x \Rightarrow x = \varepsilon$;

/2/ $\overset{(U_\varepsilon)}{L_a} : z \longrightarrow a \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} z$ есть локальный изоморфизм $<U_\varepsilon, \overset{(U_\varepsilon)}{\circ}, \overset{(U_\varepsilon)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_\varepsilon)}{/\!/}, \varepsilon>$ и $<U_a, \overset{(U_a)}{\circ}, \overset{(U_a)}{\backslash\!\backslash}, \overset{(U_a)}{/\!/}, a>$ такой, что $\overset{(\varepsilon)}{L_a} s_\varepsilon = s_a \overset{(\varepsilon)}{L_a}$. При этом $r_\varepsilon x = z \overset{(U_\varepsilon)}{\circ} s_\varepsilon \overset{(U_\varepsilon)}{z^{-1}}$.

5. <u>Определение 10.</u> $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q$ структуру назовем совершенной, если локальные лупы ее главноизотопной одулярной структуры обладают левым свойством степенной альтернативности / $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ – свойство/, т.е. $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ $x^n\circ(x^m\circ y) = x^{n+m}\circ y$. Тождество /1/ предложения 3 принимает для совершенной структуры вид:

$$z\circ(u\circ(sz^{-1}\circ w)) = (z\circ(u\circ sz^{-1}))\circ w. \qquad /8/$$

Будем называть такое тождество <u>особым полуболовым тождеством</u> / $S.\mathcal{H}\text{-}B.$ тождество/, если s – автоморфизм.

<u>Замечание.</u> Полуболовым тождеством / $\mathcal{H}.\text{-}B.$ тождеством/ называют $z\circ(u\circ(\mu z\circ w)) = (z\circ(u\circ\mu z))\circ w,$

где μ – сюръекция. /9/

<u>Предложение 4.</u> Полуболова лупа имеет левое свойство обратимости.

Введем теперь инвариантную аффинную связность в гладкой $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структуре.

<u>Теорема I.</u> Пусть $\{<U, \backslash, />\}$ – гладкая $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ – структура на многообразии M, а s_x $(x\in M)$ – ее локальные симметрии. Обозначим через S тензорное поле типа / I,I /, задаваемое как $S_x = (s_x)_{*x}$. Тогда

/A/ Существует единственная связность ∇ на M /называемая канонической /или связностью Рашевского/ такая, что инвариантна при действии s_x $(\forall x)$, $\nabla S = 0$ и ∇ имеет параллельные кривизну и кручение

/B/ Локальные автоморфизмы $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ структуры есть локальные аффинные автоморфизмы относительно связности ∇.

<u>Следствие.</u> Каноническая связность ∇ инвариантна при действии s_x, $x\in M$

6. Рассмотрим теперь геоодулярное покрытие $Id.\mathcal{L}\text{-}\mathcal{D}.Q.$ многообразия, порожденное канонической связностью ∇ /см 9 /. Тогда с каждой точкой ε будет, в частности, связана локальная геодезическая лупа

$$<U_\varepsilon, \odot, \backslash\!\backslash, /\!/, \varepsilon> \quad \overset{(\varepsilon)}{\mathcal{L}_x} y \overset{def}{=} x \overset{(\varepsilon)}{\odot} y. \qquad /10/$$

Лупа / 10 / – специальная и имеет левое свойство степенной альтернативности / $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ свойство/

$$\mathcal{L}_{x^n}\mathcal{L}_{x^m} = \mathcal{L}_{x^{n+m}}, \qquad (n,m\in\mathbb{Z}), \qquad /11/$$

что легко следует из того факта, что $\mathcal{L}_x$ – локальные автоморфизмы канонической геоодулярной структуры /см. [12],[9]/.

<u>Теорема 2.</u> Гладкая геоодулярная структура тогда и только тогда порождает редуктивную связность, когда она $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ структура и левые сдвиги ее локальных луп – автоморфизмы.

Отметим теперь, что так как s_x – локальные автоморфизмы связности ∇ , то и $L^{(\varepsilon)}_x = S_{\tau^{-1}x} S^{-1}$ тоже.

Нетрудно теперь показать, что $\mathcal{L}_x S \mathcal{L}_x^{-1} = S_x$, /12/

$$S\mathcal{L}_x S^{-1} = \mathcal{L}_{Sx} , \quad \mathcal{L}_x \mathcal{L}_{Sx^{-1}} = S_x S^{-1} . \qquad /13/, /14/$$

Откуда после некоторых преобразований имеем

$$x \nabla (Sx^{-1} \nabla (u \nabla (Su^{-1} \nabla z))) =$$

$$= [x \nabla (Sx^{-1} \nabla u)] \nabla ([Sx \nabla (S^2 x^{-1} \nabla Su)]^{-1} \nabla [Sx \nabla (S^2 x^{-1} \nabla z)]). \qquad /15/$$

Замечание. Легко убедиться, что /13/, /15/ и $\mathcal{L}.\mathcal{P}.al.$ свойство /11/ дают необходимые и достаточные условия того, что лупа /10/ есть геодезическая лупа канонической связности ∇ Id.$\mathcal{L}$-$\mathcal{D}$.Q. – структуры.

7. Обратимся к рассмотрению совершенной Id.$\mathcal{L}$-$\mathcal{D}$.Q. структуры /определение 10/. В этом случае ее главноизотопная одулярная структура в силу предложения 3 и теоремы 2 есть геодулярная структура редуктивной связности, удовлетворяющей условиям теоремы 1 и в силу единственности такой связности, имеем $L_x = \mathcal{L}_x$. /16/

Таким образом, получаем:

Предложение 5. Id.$\mathcal{L}$-$\mathcal{D}$.Q. структура совершенна, если и только если ее главноизотопная структура совпадает с геодулярной структурой канонической связности ∇ .

В случае совершенной Id.$\mathcal{L}$-$\mathcal{D}$.Q. – структуры, в силу /16/, /14/ и /8/, $S_x S_\varepsilon^{-1} = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_{Sx^{-1}} = \mathcal{L}_{x \circ Sx^{-1}} = \mathcal{L}_{\tau x}$. /17/

Отсюда следует геометрическая характеристика совершенных структур.

Предложение 6. Id.$\mathcal{L}$-$\mathcal{D}$.Q. – структура совершенна, если и только если её элементарные трансвекции $S_x S_\varepsilon^{-1}$ индуцируют /локально/ параллельный перенос вдоль геодезической, соединяющей ε с τx /по отношению к канонической связности ∇ /. Из /17/ следует, что для совершенной Id.$\mathcal{L}$-$\mathcal{D}$.Q. структуры /15/ эквивалентно /8/.

Список литературы

[1]. Ledger A.J. Espaces de Riemann symétriques généralisés. C. r. Acad. Sci. 1967, 264, N22, A947-948.

[2] Ledger A.J. Obata M. Affine and Riemannian s-manifolds. J. Different. Geom. 1968, 2, N4, 451-459.

[3] Graham P.J. Ledger A.J. Sur un classe de s-variétés riemanniennes ou affines. C.r. Acad. Sci. 1968, 267, N2, A105-A107.

[4] Graham P.J. s-regular manifolds. Differential geometry - in honour of Kentaro Yano. Tokyo. 1972, 133-144.

[5] Kowalsky O. Smooth and Affine s-manifolds. Periodica Math. Hungarica. vol 8 (3-4), (1977), 299-311.

6 Рашевский П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, 1950, вып. 8, 82-92.

7 Рашевский П.К. О геометрии однородных пространств. ДАН СССР, 1951, 80, № 2, 169-171.

8 Nomizu K. Invariant affine connection on homogeneous spaces. Amer. J. Math. 1954, 76, N1, 33-65.

9 Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью. ДАН СССР, 1977, т.233, № 5.

10 Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука , 1967.

11 Мальцев А.И. Аналитические лупы.- Математический сборник, 1955, т. 36 /78/, № 3.

[12] Kikkawa M. Geometry of Homogeneous Lie Loops. Hiroshima Math. J. 5. (1975), 141-179.