связность на G с функцией Номидзу α, то очевидно, что связность, определяемая по формуле (I), будет K-инвариантной связностью на H. Обратно, если $\widetilde{\nabla}$ - K-инвариантная связность на H, то функция Номидзу $\alpha(X,Y)=\widetilde{\alpha}(X_{\mathfrak{h}},Y_{\mathfrak{h}})+[X,Y]_{\mathfrak{N}}, X,Y\in\mathfrak{g}$ будет определять K-инвариантную связность на G, проекция которой даст $\widetilde{\nabla}$.

О п р е д е л е н и е 2. Левоинвариантную аффинную связность ∇ на G назовем коммутативной, если $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}=\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}$ для всех левоинвариантных векторных полей $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ на G.

Очевидно, что связность на G с функцией Номидзу α является коммутативной тогда и только тогда, когда для всех $X,Y\in\mathfrak{g}$ $\alpha(X,Y)=\alpha(Y,X)$.

П р е д л о ж е н и е I. Связность на H, индуцированная связностью группы Ли G с функцией Номидзу α вдоль N-оснащения, коммутативна тогда и только тогда, когда для любых $X,Y\in\mathfrak{h}$: $\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X)\in\mathfrak{N}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

С л е д с т в и е. (+)-связность [4] группы Ли G индуцирует на H коммутативную связность тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ является абелевой алгеброй Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{h}$ абелева, то все очевидно. Обратно, используя предложение I, для всех $X,Y\in\mathfrak{h}$ имеем $[X,Y]\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{h}=\{0\}$.

П р е д л о ж е н и е 2. Если связность группы Ли G с нулевым кручением индуцирует на H (2)-связность [4], то $\mathfrak{h}$ есть абелева алгебра Ли.

П р е д л о ж е н и е 3. Если H -абелева группа Ли, то связность на G с нулевым кручением индуцирует на H коммутативную связность.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в силу связи между функциями Номидзу и Вана левоинвариантной аффинной связности группы Ли G [2] любая K-связность на G [3] будет K-инвариантной связностью. Обратное, вообще говоря, неверно.

Библиографический список

I. Б а л а щ е н к о В.В. Индуцирование связностей, порожденных диффеоморфизмом регулярного Ф-пространства линейной группы Ли// Вестн.Белорус.ун-та.Сер.I.Физ., матем. и мех. 1986. №I. С.56-59.

2. В и н б е р г Э.Б. Инвариантные линейные связности в однородном пространстве// Тр.Моск.матем.о-ва, 1960. Т.9. С.191-210.

3. С т е п а н о в Н.А. О φ-пространствах, допускающих инвариантное оснащение// Изв.вузов.Матем. 1982. №2. С.63-70.

4. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. V76. No1. P.33-65.

5. Ч у р б а н о в Ю.Д. Индуцированные связности на линейных группах Ли//Вестн.Белорус.ун-та.Сер.I.Физ., матем. и мех. 1986. №3.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I9 1988

УДК 514.75

О ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА, ИНДУЦИРОВАННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И.Ш е в ч е н к о
(Калининградский университет)

Найдены условия, при которых классическую проективную связность, индуцированную путем проектирования на поверхности проективного пространства, можно рассматривать как связность в главном расслоении.

I. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I,J,K=\overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого зададим формулами

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\quad dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A,$$

где θ -несущественная линейная форма, а инвариантные формы $\omega^I,\omega_I^J,\omega_I$ проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям [I, с.I73], [I3, с.I2I]:

$$d\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\qquad d\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,$$

$$d\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J+\omega_I\wedge\omega^J+\delta_I^J\omega_K\wedge\omega^K.$$

В пространстве P_n рассмотрим локально m-мерную поверхность X_m как многообразие ее центрированных касательных плоскостей T_m. Произведем специализацию подвижного репера

$$\{A, A_i, A_a\}\quad (i,j,k,l,h=\overline{1,m};\quad a,b=\overline{m+1,n}),$$

помещая вершины A, A_i на образующую плоскость T_m, причем вершину A - в ее центр. Уравнения поверхности X_m в таком репере нулевого порядка имеют вид $\omega^a=0$, $\omega_i^a=\Lambda_{ij}^a\omega^j$. Замыкая I-ю подсистему, получим $\Lambda_{ij}^a=\Lambda_{ji}^a$; продолжая 2-ю подсистему, найдем $\nabla\Lambda^a_{ij}=\Lambda^a_{ijk}\omega^k$, где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Lambda^a_{ij}=d\Lambda^a_{ij}-\Lambda^a_{ik}\omega^k_j-\Lambda^a_{kj}\omega^k_i+\Lambda^b_{ij}\omega^a_b .$$

Совокупность функций Λ^a_{ij} является фундаментальным тензором I-го порядка поверхности X_m, рассматриваемой как многообразие касательных плоскостей.

2.Осуществим оснащение Картана [2] поверхности X_m, состоящее в присоединении к каждой касательной плоскости T_m такой $(n-m-1)$-плоскости K_{n-m-1}, что $K_{n-m-1}\cap T_m=\varnothing$. Плоскость Картана K_{n-m-1} зададим базисными точками $B_a=A_a+\lambda^i_a A_i+\lambda_a A$, причем компоненты оснащающего квазитензора $\lambda=(\lambda^i_a,\lambda_a)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\lambda^i_a+\omega^i_a=\lambda^i_{aj}\omega^j,\quad \nabla\lambda_a+\lambda^i_a\omega_i+\omega_a=\lambda_{ai}\omega^i.$$

Запишем деривационные формулы базисных точек касательной плоскости T_m в виде

$$dA=\theta A+\omega^i A_i,\quad dA_i=\theta A_i+\bar\omega^j_i A_j+\bar\omega_i A+\omega^a_i B_a, \qquad (1)$$

где

$$\bar\omega^j_i=\omega^j_i-\lambda^j_a\omega^a_i,\quad \bar\omega_i=\omega_i-\lambda_a\omega^a_i . \qquad (2)$$

Из формул (I) видно, что формы $\omega^i, \bar\omega^j_i, \bar\omega_i$ (достаточно $i\neq j$) определяют проекцию на касательную плоскость T_m смежной с ней плоскости T_m+dT_m из многомерного центра K_{n-m-1}. Назовем их формами проекции. В противоположность базисным формам ω^i формы проекции (2) зависят от оснащения λ, поэтому будем называть их существенными. Структурные уравнения форм проекции имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,\\ d\bar\omega^i_j=\bar\omega^k_j\wedge\bar\omega^i_k+\bar\omega_j\wedge\omega^i+\delta^i_j\bar\omega_k\wedge\omega^k+P^i_{jk\ell}\omega^k\wedge\omega^\ell,\\ d\bar\omega_i=\bar\omega^j_i\wedge\bar\omega_j+P_{ijk}\omega^j\wedge\omega^k,\end{cases}\qquad (3)$$

где

$$P^i_{jk\ell}=\lambda_a\delta^i_{[k}\Lambda^a_{j\ell]}+\Lambda^a_{j[k}(\lambda^i_{a\ell]}-\Lambda^b_{\ell]h}\lambda^h_a\lambda^i_b),$$

$$P_{ijk}=\Lambda^a_{i[j}(\lambda_{ak]}-\Lambda^b_{k]\ell}\lambda^\ell_a\lambda_b),$$

причем по крайним индексам, заключенным в квадратные скобки, производится альтернирование. Это структурные уравнения погруженного пространства проективной связности в смысле Картана без кручения [3,с.III], [I3,с.234]. Из системы уравнений (3) видно, что существенные формы проекции (2) не являются формами связности в главном расслоении. Значит, справедлива

Т е о р е м а I. Оснащение Картана поверхности позволяет проектировать ее касательные плоскости друг на друга, что аналитически описывается с помощью форм проекции, которые определяют проективную связность в смысле Картана, но не являются структурными формами главного расслоения со связностью.

Тем не менее в рассматриваемом или в аналогичных случаях говорят о связности, индуцированной путем проектирования [2], [4]-[7]. Тот факт, что классическая проективная связность не является связностью в обычном смысле, отмечался некоторыми авторами [I,с.I67], [8], которые указали подходы к связности Картана с точки зрения расслоений. При этом не вполне обосновано утверждение [9] о том, что связность на многообразии, обобщающая связность Картана, является частным случаем общего понятия связности.

3.Рассмотрим расслоение $A^*(X_m)$ центропроективных реперов, принадлежащих касательным плоскостям T_m, со структурными уравнениями

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j, \qquad (4)$$

$$d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+\omega^k\wedge\omega^i_{jk}\quad(\omega^i_{jk}=\Lambda^a_{jk}\omega^i_a-\delta^i_j\omega_k-\delta^i_k\omega_j), \qquad (5)$$
$$d\omega_i=\omega^j_i\wedge\omega_j+\omega^j\wedge\omega_{ij}\quad(\omega_{ij}=\Lambda^a_{ij}\omega_a).$$

Базой главного расслоения $A^*(X_m)$ является поверхность X_m, а типовым слоем - центропроективная (коаффинная) группа $A^*=GA^*(m)\subset GP(n)$, действующая в центрированной касательной плоскости T_m. Расслоение $A^*(X_m)$ содержит подрасслоение линейных реперов $L(X_m)$ со структурными уравнениями (4), (5), типовым слоем которого является линейная группа $L=GL(m)\subset GA^*(m)$, действующая во множестве касательных прямых (ср.[I0],с.59-60).

Связность в главном расслоении $A^*(X_m)$ задается по Лаптеву [3,с.62] с помощью форм $\tilde\omega^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k$, $\tilde\omega_i=\omega_i-\Gamma_{ij}\omega^j$, причем компоненты объекта центропроективной связности $(\Gamma^i_{jk},\Gamma_{ij})$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\omega^l,\quad \nabla\Gamma_{ij}+\Gamma^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij}=\Gamma_{ijk}\omega^k.$$

Объект центропроективной связности содержит подобъект линейной (в классической терминологии – аффинной) связности Γ^i_{jk}, который определяет связность в расслоении $L(X_m)$. Эту связность назовем подчиненной. Формы центропроективной связности $\tilde\omega^i_j$, $\tilde\omega_i$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\tilde\omega^i_j=\tilde\omega^k_j\wedge\tilde\omega^i_k+R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,\quad d\tilde\omega_i=\tilde\omega^j_i\wedge\tilde\omega_j+R_{ijk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

где компоненты объекта центропроективной кривизны (R^i_{jkl},R_{ijk}) выражаются по формулам

$$R^i_{jkl}=\Gamma^i_{j[kl]}-\Gamma^h_{j[k}\Gamma^i_{hl]},\quad R_{ijk}=\Gamma_{i[jk]}-\Gamma^l_{i[j}\Gamma_{lk]}.$$

4. Произведем дополнительно нормализацию 2-го рода в смысле А.П.Нордена [II,с.I97] поверхности X_m, т.е. присоединим к каждой касательной плоскости T_m $(m-1)$-плоскость $N_{m-1}: A\notin N_{m-1}\subset T_m$. Плоскость N_{m-1} зададим совокупностью базисных точек $B_i=A_i+\lambda_iA$, причем

$$\nabla\lambda_i+\omega_i=\lambda_{ij}\omega^j. \qquad (6)$$

Продолжая эти уравнения, получим

$$\nabla\lambda_{ij}-\lambda_k\omega^k_{ij}+\omega_{ij}=\lambda_{ijk}\omega^k.$$

Внесем формы $\tilde\omega^i_j$, $\tilde\omega_i$ в уравнения (6), которые примут вид $\Delta\lambda_i=\tilde\lambda_{ij}\omega^j$, где ковариантный дифференциал $\Delta\lambda_i$ и ковариантные производные $\tilde\lambda_{ij}$ нормализующего квазитензора λ_i относительно центропроективной связности выражаются по формулам

$$\Delta\lambda_i=d\lambda_i-\lambda_j\tilde\omega^j_i+\tilde\omega_i,\quad \tilde\lambda_{ij}=\lambda_{ij}-\Gamma_{ij}+\lambda_k\Gamma^k_{ij}.$$

Отметим, что равенства $\tilde\lambda_{ij}=0$ или

$$\Gamma_{ij}=\lambda_{ij}+\lambda_k\Gamma^k_{ij} \qquad (7)$$

имеют инвариантный смысл [I2]. Откуда вытекает

Т е о р е м а 2. Нормализация 2-го рода поверхности X_m дает возможность любую линейную связность расслоения $L(X_m)$ достроить до единственной центропроективной связности расслоения $A^*(X_m)$, в которой нормаль 2-го рода N_{m-1} переносится абсолютно параллельно.

Т е о р е м а 3. Оснащение Картана и нормализация 2-го рода А.П.Нордена поверхности X_m позволяют задать в расслоении $A^*(X_m)$ центропроективные связности двух типов с совпадающими подчиненными линейными связностями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компоненты объекта центропроективной связности I-го типа определяются формулами

$$\Gamma^i_{jk}=\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a-\delta^i_j\lambda_k-\delta^i_k\lambda_j,\quad \overset{1}{\Gamma}_{ij}=\Lambda^a_{ij}\lambda_a-\lambda_i\lambda_j.$$

У объекта связности 2-го типа $(\Gamma^i_{jk},\overset{2}{\Gamma}_{ij})$ компоненты $\overset{2}{\Gamma}_{ij}$ выражаются по формулам (7) через охваченные выше компоненты Γ^i_{jk}.

Т е о р е м а 4. Существенные формы проекции совпадают с формами центропроективной связности I-го типа тогда и только тогда, когда подвижной репер адаптирован полю нормалей 2-го рода. Совпадение с формами связности 2-го типа происходит только в том случае, когда выполнено предыдущее условие и все смещения нормали 2-го рода N_{m-1} лежат в гиперплоскости $P_{n-1}=N_{m-1}+K_{n-m-1}$. В обоих случаях сохраняет смысл лишь общая подчиненная линейная связность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формы $\bar\omega^i_j$, $\bar\omega_i$ совпадают с формами $\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k$, $\omega_i-\overset{1}{\Gamma}_{ij}\omega^j$ тогда и только тогда, когда $\lambda_i=0$. В этом случае $B_i=A_i$, а уравнения (6) принимают вид $\omega_i=\lambda_{ij}\omega^j$. Расслоение центропроективных реперов $A^*(X_m)$ сокращается до расслоения линейных реперов $L(X_m)$. Значит, лишь $\bar\omega^i_j$ становятся формами линейной связности. Аналогично найдем условия совпадения с формами $\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k$, $\omega_i-\overset{2}{\Gamma}_{ij}\omega^j$. Двухиндексные формы и условия их совпадения такие же, как в I-ом случае, поэтому $\lambda_i=0$. Равенства $\bar\omega_i=\omega_i-\overset{2}{\Gamma}_{ij}\omega^j$ обращаются в тождества, лишь когда $\lambda_a\Lambda^a_{ij}=\lambda_{ij}$. Тогда

$$dA_i=\theta A_i+\omega^j_iA_j+\omega^a_iC_a\qquad (C_a=A_a+\lambda_aA).$$

Таким образом, смещения нормали 2-го рода происходят в натянутой на точки A_i, C_a гиперплоскости P_{n-1} с уравнением $x=\lambda_ax^a$.

Библиографический список

1.К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии.М.:Наука,1986.224с.

2.К а р т а н Э. Пространства проективной связности//Тр.семинара по векторному и тензорному анализу.М.;Л.,1937.Вып.4. С.160-173.

3.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1979.Т.9. 247с.

4.Л а п т е в Г.Ф. Гиперповерхность в пространстве проективной связности// Докл.АН СССР.1958.Т.121.№1.С.41-44.

5.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей//Геометрия.1963.Итоги науки/ ВИНИТИ. М.,1965.

6.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-93.

7.Р ы б н и к о в А.К. Аффинные связности,индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного пространства // Тр.геометр. семинара/ ВИНИТИ.М.,1974.Т.6.С.135-154.

8.Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях// Матем.сб.М.,1966.Т.69.С.434-469.

9.Л у м и с т е Ю.Г. Связности на многообразиях//Математическая энциклопедия.М.,1984.С.1092-1094.

10.Ч а к м а з я н А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1978.Т.10.С.55-74.

11.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.432с.

12.Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.115-120.

13. Cartan E. Leçons sur la théorie des espaces a connexion projective. Paris : Gauthier-Villars, 1937. 308 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.19 1988

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ $\mathfrak{A}$

С.В. Ш м е л е в а

(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется класс конгруэнций невырожденных линейчатых квадрик Q -конгруэнции $\mathfrak{A}$, -обладающих следующими свойствами: 1) на квадрике $Q \in \mathfrak{A}$ существуют по крайней мере две различные фокальные точки A_0 и A_3 ,описывающие неплоские поверхности и не лежащие на одной прямолинейной образующей; 2) точки A_1 и A_2 пересечения прямолинейных образующих квадрики Q ,проходящих через A_0 и A_3 ,являются фокальными; 3) линии,огибаемые на поверхностях (A_0) и (A_3) прямыми A_0A_i и A_3A_i, являются асимптотическими и соответствуют друг другу.Доказано,что фокальные поверхности (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathfrak{A}$ имеют кратность три и являются линейчатыми квадриками,а фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии.

Учитывая условия 1),2),3) в системе (1) работы [1] ,находим,что система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathfrak{A}$ в репере $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^3=0, \ \omega_3^0=0, \ \omega_i^{\hat{i}}=0, \ \omega_i^3=(1+c_{12})\omega^{\hat{i}}, \\ dc_{12}+(1+c_{12})\Omega=0, \ \omega_3^i=b_i^i\omega^i, \ \omega_i^0-\omega_3^{\hat{i}}=\lambda_{i\hat{i}}\omega^{\hat{i}}, \\ \Omega=h_k\omega^k, \ \ \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0, \end{cases} \tag{1}$$

причем

$$b_1^1\lambda_{12}-b_2^2\lambda_{21}=0, \ \lambda_{12}-\lambda_{21}+c_{12}(b_1^1-b_2^2)=0, \tag{2}$$

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \ \ b_1^1b_2^2(1+c_{12})(b_1^1+\lambda_{21})(b_2^2+\lambda_{12})\neq 0. \tag{3}$$