3) $\mathcal{H}(\Pi)$-распределение представляет собой $(n-r)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос $H^r_{n-m+r-1}$.

Список литературы

1. *Елисеева Н. А.* Поля плоскостей, параллельные в нормальных связностях $\mathcal{H}(\Pi)$-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2011. Вып. 42. С. 41—47.
2. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: монография. 2-е изд. Чебоксары, 1994.
3. *Столяров А. В.* Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. науки). 1996. №6. С. 9—14.
4. *Елисеева Н. А.* Нормальные связности, индуцируемые в расслоении нормалей второго рода на Λ-подрасслоении $\mathcal{H}(\Pi)$-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 63—66.

N. Eliseeva

Investigation of the plane fields parallel in normal connections of $\mathcal{H}(\Pi)$-distribution

This article develops some ideas of [1]. Plane fields parallel in normal connections, induced in a bundle of normals of the 1st and 2nd kind on Λ-subbundle of $\mathcal{H}(\Pi)$-distribution are considered.

УДК 514.75

М. В. Кретов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Комплексы конусов

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуются комплексы T_3 (трехпараметрические семейства) конусов, вершины которых описывают двумерные многообразия. Получены геометрические свойства одного из подклассов рассматриваемого многообразия фигур.

Ключевые слова: конус, аффинное пространство, комплекс, многообразие, репер, система управлений Пфаффа, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, индикатриса вектора, конгруэнция.

Отнесем комплекс T_3 конусов к реперу $R=\{A,\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: A — вершина конуса, векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ лежат в касательной плоскости в вершине конуса и сопряжены между собой, вектор $\overline{e}_3$ направлен по оси образующего элемента, концы p_1 и p_2 соответственно векторов $\overline{e}_1+\overline{e}_3$ и $\overline{e}_2+\overline{e}_3$ лежат на конусе. При этом уравнение конуса q согласно [1] будет иметь вид

$$(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0. \tag{1}$$

Принимая формы $\theta^1=\omega^1$, $\theta^2=\omega^2$, $\theta^3=\omega_2^1+\omega_1^2$ за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса T_3 в виде

$$\omega_i^i=A_{ik}^i\theta^k,\ \ \omega_3^1+\omega_1^3=A_{1k}^3\theta^k,\ \ \omega_3^2+\omega_2^3=A_{2k}^3\theta^k,\ \ \omega^3=A_k^3\theta^k, \tag{2}$$

где *i, j, k,...=1, 2, 3* (по *i* не суммировать!).

Согласно выбору канонического репера

$$\omega^3=0. \tag{3}$$

Замыкая уравнение (3) и применяя лемму Картана в соответствии с работой [2], получаем

$$\omega_1^3=\lambda_{11}\theta^1+\lambda_{12}\theta^2,\ \ \omega_2^3=\lambda_{12}\theta^1+\lambda_{22}\theta^2. \tag{4}$$

Определение 1. *Комплексом* T_3^1 *конусов назовем комплекс* T_3 *конусов, если индикатриса векторов* $\overline{e}_1$ *будет описывать поверхность с касательной плоскостью, параллельной координатной плоскости* $(A,\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2)$.

Теорема 1. *Существуют три подкласса комплексов T_3^1 с произволом четырех функций трех аргументов и один подкласс комплексов T_3^1 с произволом двух функций трех аргументов.*

Для доказательства теоремы обозначим первые три подкласса комплексов T_3^1 символами T_{3i}^1, четвертый подкласс — символом T_{34}^1. Системы уравнений Пфаффа комплексов T_{3i}^1 и T_{34}^1 соответственно будут иметь вид

$$\begin{aligned}&\omega_i^i = A_{ik}^i\theta^k,\ \omega_3^1 = A_{1k}^3\theta^k,\ \omega_3^2 = A_{21}^3\theta^1 + A_{22}^3\theta^2,\ \omega_2^3 = \lambda_{22}\theta^2,\\ &\omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0;\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\omega_i^i = A_{ik}^i\theta^k,\ \omega_3^1 = A_{1k}^3\theta^k - \lambda_{11}\theta^1,\ \omega_3^2 = A_{21}^3\theta^1,\ \omega_2^3 = \lambda_{22}\theta^2,\\ &\omega_1^3 = \lambda_{11}\theta^1,\quad \omega^3 = \omega_1^2 = 0;\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\omega_i^i = A_{ik}^i\theta^k,\ \omega_3^1 = A_{1k}^3\theta^k - \lambda_{12}\theta^2,\ \omega_3^2 = (A_{22}^3 - \lambda_{22})\theta^2,\\ &\omega_1^3 = \lambda_{12}\theta^2,\ \omega_2^3 = \lambda_{12}\theta^1 + \lambda_{22}\theta^2,\quad \omega^3 = \omega_1^2 = 0;\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\omega_i^i = A_{ik}^i\theta^k,\ \omega_3^1 = A_{1k}^3\theta^k - \lambda_{11}\theta^1 - \lambda_{12}\theta^2,\\ &\omega_3^2 = A_{21}^3\theta^1 + A_{22}^3\theta^2 - \lambda_{12}\theta^1 - \frac{1}{\lambda_{11}}(\lambda_{11}A_{22}^3 + \lambda_{12}^2 - \lambda_{12}A_{21}^3)\theta^2,\\ &\omega_2^3 = \lambda_{12}\theta^1 + \frac{1}{\lambda_{11}}(\lambda_{11}A_{22}^3 + \lambda_{12}^2 - \lambda_{12}A_{21}^3)\theta^2,\\ &\omega_1^3 = \lambda_{11}\theta^1 + \lambda_{12}\theta^2,\ \omega^3 = \omega_1^2 = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

где $\theta^1 = \omega^1$, $\theta^2 = \omega^2$, $\theta^3 = \omega_2^1$, по i не суммировать!

Теорема доказывается по методике, изложенной в учебном пособии [2].

Выделим из комплексов T_{31}^1 комплекс $\hat{T}_{31}^1$ из следующих геометрических соображений:

Определение 2. *Комплексом $\hat{T}_{31}^1$ конусов назовем комплекс T_{31}^1, для которого точки p_1* и *p_2 принадлежат характеристическому и фокальному многообразию конуса [3], индикатриса* *векторов* $\overline{e}_2$ *описывает поверхность с касательной, параллельной координатной плоскости* $(A,\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_3)$*, а индикатриса векторов* $\overline{e}_3$ *описывает поверхность с касательной, параллельной координатной плоскости* $(A,\ \overline{e}_1,\ \overline{e}_2)$.

Из определения комплекса $\hat{T}^1_{31}$ следует

$$A^2_{21} = A^2_{22} = A^2_{23} = A^3_{31} = A^3_{32} = A^3_{33} = 0,\ \ A^1_{13} = -A^3_{13},\ \ A^2_{23} = A^3_{33}, \quad (9)$$

поэтому система уравнений Пфаффа для рассматриваемого многообразия примет вид

$$\begin{aligned} &\omega^1_1 = A^k_{1k}\theta^k,\ \ \omega^1_3 = -\omega^1_1 - \theta^1,\ \ \omega^2_3 = -\theta^2, \\ &\omega^3 = \omega^2_2 = \omega^3_3 = \omega^2_1 = \omega^3_1 = \omega^3_2 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\theta^1 = \omega^1$, $\theta^2 = \omega^2$, $\theta^3 = \omega^1_2$.

Исследуя систему уравнений (10) согласно [2], убеждаемся в том, что комплексы $\hat{T}^1_{31}$ конусов существуют и определяются с произволом одной функции трех аргументов.

Для комплексов $\hat{T}^1_{31}$ доказаны три теоремы.

Теорема 2. *Характеристическому многообразию конуса [3], описывающего комплекс* $\hat{T}^1_{31}$*, принадлежат две прямые: координатная прямая* $(A,\ \overline{e}_3)$ *и прямая, параллельная координатной прямой* $(A,\ \overline{e}_2)$*, проходящая через конец вектора* $\overline{e}_3$.

Доказательство следует из системы уравнений

$$\begin{aligned} &A^1_{11}(x^1)^2 - (A^1_{11}+1)x^1x^3 + x^1 = 0, \\ &A^1_{12}(x^1)^2 - A^1_{12}x^1x^3 - x^2x^3 + x^2 = 0, \\ &A^1_{13}(x^1)^2 + x^1x^2 - A^1_{13}x^1x^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 3. *Вершина конуса, точки* p_1 и p_2 *принадлежат фокальному многообразию конуса [3], описывающего комплекс* $\hat{T}^1_{31}$.

Доказательство следует из системы уравнений (11) и уравнения (1).

Теорема 4. *Комплексы* $\hat{T}^1_{31}$ *конусов обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) *вершина конуса описывает конгруэнцию (двупараметрическое семейство) плоскостей, параллельных координатной плоскости* $(A, \ \bar{e}_1, \ \bar{e}_2)$*;*

2) *индикатриса вектора* $\bar{e}_2$ *описывает линию с касательной, параллельной координатной прямой* $(A, \ \bar{e}_1)$*;*

3) *индикатрисы векторов* $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_3$ *описывают комплексы линий с касательными, параллельными координатной прямой* $(A, \ \bar{e}_1)$*;*

4) *концы векторов* $\bar{e}_i$*, текущие точки координатных прямых* $(A, \ \bar{e}_1)$ *и* $(A, \ \bar{e}_2)$ *описывают комплексы плоскостей, параллельных координатной плоскости* $(A, \ \bar{e}_1, \ \bar{e}_2)$*;*

5) *координатная плоскость* $(A, \ \bar{e}_1, \ \bar{e}_2)$ *неподвижна.*

Доказательство следует из системы уравнений Пфаффа (10), деривационных формул репера *R* и правил дифференцирования.

Список литературы

1. *Комиссарук А. М.* Аффинная геометрия. Минск, 1977.

2. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

3. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

M. Kretov

Complexes of cones

In three-dimensional equiaffine space complexes (three-parameter family) cones are investigated. The geometrical properties of one of subclasses for considered variety of figures are obtained.