Список литературы

1. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.2. Калининград, 1970, с.28-37.

2. А н д р е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград. 1973. с.6-19.

3. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Труды геометрического семинара, 1969, т.2. М., ВИНИТИ, с.179-206.

4. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки. ВИНИТИ. Геометрия, 1963, с.65-107.

5. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.50-59.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

В.Т. Б а з ы л е в

МНОГОМЕРНЫЕ СЕТИ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ

С.П. Фиников [1] изучал сети двойных линий на паре поверхностей в трехмерном проективном пространстве. В предлагаемой статье мы исследуем сети двойных линий на паре гиперповерхностей проективного n-пространства.

1. Пусть в проективном n-пространстве P_n заданы две гладкие гиперповерхности V_{n-1} и V'_{n-1} и диффеоморфизм $f: V_{n-1} \to V'_{n-1}$ такой, что $f(A) \neq A$, $\forall A \in V_{n-1}$.

Присоединим к паре этих гиперповерхностей подвижной проективный репер $\mathcal{R} = \{A, A_1, \dots, A_n\}$, где $A \in V_{n-1}$, $A_n = f(A) \in V'_{n-1}$, $A_i \in P_{n-2}(A)$ $(i, j, k = 1, 2, \dots, n-1)$, где $P_{n-2}(A)$ - пересечение касательных гиперплоскостей к V_{n-1} и V'_{n-1}, взятых соответственно в точках A и A_n. Имеем деривационные формулы:

$$dA = \omega_0^0 A_0 + \omega^i A_i ,$$

$$dA_i = \omega_i^0 A + \omega_i^j A_j + \omega_i^n A_n , \qquad (1)$$

$$dA_n = \omega_n^0 A + \omega_n^i A_i + \omega_n^n A_n .$$

Если зафиксировать точку A (положив $\omega^i = 0$), то будут фиксированы точка A_n и плоскость $P_{n-2}(A)$.Это приводит к следующей системе дифференциальных уравнений,определяющей нашу пару гиперповерхностей:

$$\omega^n = 0, \qquad \omega^0_n = 0, \tag{2}$$

$$\omega^0_i = a_{ij}\,\omega^j, \quad \omega^n_i = b_{ij}\,\omega^j, \tag{3}$$

$$\omega^i_n = c^i_j\,\omega^j. \tag{4}$$

Так как точка A_n описывает гиперповерхность,то из последней формулы (I) следует,что I-формы ω^i_n линейно независимы,значит,в формуле (4) имеем: $\det\|c^i_j\| \neq 0$.

Продолжая уравнения (3),находим:

$$da_{ij} + 2a_{ij}\,\omega^0_0 - a_{kj}\,\omega^k_i - a_{ik}\,\omega^k_j = a_{ijk}\,\omega^k, \tag{5}$$

$$db_{ij} + b_{ij}\,(\omega^0_0 + \omega^n_n) - b_{kj}\,\omega^k_i - b_{ik}\,\omega^k_j = b_{ijk}\,\omega^k, \tag{6}$$

где a_{ijk} и b_{ijk} симметричны по двум последним индексам. Из уравнений (5),(6) следует,что каждая из систем функций $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ образует тензор.Продолжая уравнения (2),получим,что тензор b_{ij} симметричный и

$$a_{ij}\,c^i_k = a_{ik}\,c^i_j. \tag{7}$$

Наконец,продолжая уравнение (4),находим:

$$dc^i_j + c^i_j\,(\omega^0_0 - \omega^n_n) + c^k_j\,\omega^i_k - c^i_k\,\omega^k_j = c^i_{jk}\,\omega^k, \tag{8}$$

где $c^i_{jk} = c^i_{kj}$.

Как показывает система уравнений (8),система функций $\{c^i_j\}$ образует тензор.

2. Линия $\gamma \subset V_{n-1}$,как и линия $f(\gamma) \subset V'_{n-1}$,называется линией [I] отображения f,если в каждой точке $A \in \gamma$ касательная к линии γ в этой точке пересекает касательную к линии $f(\gamma)$ в точке $f(A)$.Ясно,что точка пересечения этих касательных принадлежит плоскости $P_{n-2}(A)$.Примем эту точку за вершину A_1 репера $\mathcal{R}$ и возьмем точку $M_\lambda = \lambda A + A_n$.Когда точка A описывает линию γ ($\omega^1 \neq 0$,остальные $\omega^i = 0$, $i \neq 1$),точка A_n описывает линию $f(\gamma)$,а точка M_λ -линию,касающуюся прямой (M_λ, dM_λ),где $dM_\lambda = d\lambda\cdot A + \lambda dA + dA_n$. Так как точки dA и dA_n лежат в плоскости $(A\,A_1A_n)$, которая содержит и точки A, M_λ,то $(M_\lambda, dM_\lambda) \subset (AA_1A_n)$. Следовательно,когда точка A описывает двойную линию γ, прямая (AA_n) описывает линейчатую поверхность,которая во всех точках этой прямой имеет одну и ту же касательную плоскость (AA_1A_n),и,значит,эта линейчатая поверхность - развертывающаяся.Отсюда вытекает:

Т е о р е м а I.Двойные точки отображения f высекаются на гиперповерхностях V_{n-1} и V'_{n-1} развертывающимися поверхностями семейства прямых (AA_n).

Пусть точка $F = \lambda A + A_n$ является фокусом прямой (AA_n), т.е. описывает ребро возврата некоторой развертывающейся поверхности семейства прямых (AA_n).Следовательно, $dF \in (AA_n)$,когда точка A смещается в некотором направлении на поверхности V_{n-1}.Это приводит к следующей системе уравнений:

$$(c^i_j+\lambda\delta^i_j)\,\omega^j=0. \qquad (9)$$

Так как формы ω^j не обращаются в нуль одновременно, то λ является корнем уравнения:

$$\det\|c^i_j+\lambda\delta^i_j\|=0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет степень $n-1$ относительно λ. Так как $\det\|c^i_j\|\neq 0$, то уравнение (10) не удовлетворяется значением $\lambda=0$. Следовательно, точка A_n не является фокусом прямой (AA_n).

Допустим, что все корни уравнения (10) различны. Тогда система (9) определяет на поверхности V_{n-1} $n-1$ линейно независимых одномерных распределений, интегральные кривые которых образуют на этой поверхности сеть σ_{n-1} двойных линий отображения f. Сеть $\sigma'_{n-1}=f(\sigma_{n-1})$ является сетью двойных линий на поверхности V'_{n-1}.

Поместим вершины A_i репера $\mathcal{R}$ в точках пересечения касательных к соответствующим линиям сетей σ_{n-1} и σ'_{n-1}. Тогда $c^i_j=0$, $i\neq j$. Обозначим c^i_i через c^i. Так как корни уравнения (10) все различны, то $c^i\neq c^j$, $i\neq j$.

Из уравнения (8) находим:

$$(c^j-c^i)\,\omega^i_j=c^i_{jk}\,\omega^k \quad (i\neq j). \qquad (11)$$

Отсюда следует, что формы ω^i_j – главные. Положим:

$$\omega^i_j=a^i_{jk}\,\omega^k. \qquad (12)$$

Из уравнений (11), (12) следует:

$$(c^j-c^i)\,a^i_{jk}=c^i_{jk}. \qquad (13)$$

Так как c^i_{jk} симметричны по нижним индексам, то

$$(c^j-c^i)\,a^i_{jk}=(c^k-c^i)\,a^i_{kj}. \qquad (14)$$

Пусть $n>3$. Условие голономности сети σ_{n-1} (полная интегрируемость каждой из 1-форм ω^i) имеет вид:

$$a^i_{jk}=a^i_{kj} \quad (\text{все } i,j,k \text{ различны}). \qquad (15)$$

Из равенств (14), (15) $(c^j-c^k)\,a^i_{jk}=0$.

Отсюда $a^i_{jk}=0$ (так как $c^j\neq c^k$). Поэтому

$$\omega^i_j=a^i_{ji}\,\omega^i+a^i_{jj}\,\omega^j.$$

Следовательно, сеть σ_{n-1} является ∇-сопряженной системой [2] относительно аффинной связности ∇, индуцированной на V_{n-1} нормализацией этой гиперповерхности при помощи поля нормалей I рода (AA_n) и поля нормалей $\overline{\text{II}}$ рода $P_{n-2}(A)$.

Такое же заключение можно сделать и относительно сети σ'_{n-1}. Поэтому справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Если $n>3$ и все фокусы прямой (AA_n) различны, то сеть σ_{n-1} двойных линий голономна тогда и только тогда, когда она является ∇-сопряженной системой относительно указанной выше аффинной связности.

Заметим, что при этом сеть σ'_{n-1} также является ∇'-сопряженной системой относительно аффинной связности ∇', индуцированной на поверхности V'_{n-1} нормализацией при помощи поля нормалей I рода (AA_n) и поля нормалей II рода $P_{n-2}(A)$.

3. Асимптотические формы Φ и Φ' поверхностей V_{n-1} и V'_{n-1} в репере $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$\Phi = \omega^n_i \omega^i, \quad \Phi' = \omega^o_i \omega^i_n,$$

т.е.

$$\Phi = b_{ij}\omega^i\omega^j, \quad \Phi' = p_{ij}\omega^i_n\omega^j_n \quad (p_{ij} = p_{ji}).$$

В общем случае на поверхности V_{n-1} существует единственная сопряженная сеть, которая в отображении f переходит в сопряженную сеть на поверхности V'_{n-1}. Направления касательных к линиям такой сети сопряжены одновременно относительно двух квадратичных форм Φ и Φ'. Рассмотрим случай, когда поверхности V_{n-1} и V'_{n-1} являются $(n-1)$-сопряженными системами относительно своих сетей двойных линий σ_{n-1} и σ'_{n-1} соответственно. Такая пара $\{V_{n-1}, V'_{n-1}\}$ определяется в репере $\mathcal{R}$ следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^n = 0, \quad \omega^n_i = b_{ii}\omega^i, \quad \omega^i_j = a^i_{ji}\omega^i + a^i_{jj}\omega^j \quad (i \neq j) \qquad (16)$$

$$\omega^o_n = 0, \quad \omega^o_i = p_{ii}\omega^i, \quad \omega^i_n = c^i\omega^i. \qquad (17)$$

Замыкание системы уравнений (I6),(I7) имеет вид:

$$\Delta b_{ii} \wedge \omega^i = 0, \quad \Delta a^i_{ji} \wedge \omega^i + \Delta a^i_{jj} \wedge \omega^j = 0, \qquad (18)$$

$$\Delta p_{ii} \wedge \omega^i = 0, \quad \Delta c^i \wedge \omega^i = 0, \qquad (19)$$

где I-форма $\Delta\varphi$ представляет дифференциал $d\varphi$ функции φ. Нетрудно убедиться, что система уравнений (I6)-(I9) находится в инволюции с характерами $s_1 = 3(n-1)$, $s_2 = (n-1)(n-2)$.

Система уравнений (I6),(I8) находится в инволюции и определяет $(n-1)$-сопряженную систему V_{n-1} с произволом $(n-1)(n-2)$ функций двух переменных. Исследование системы уравнений (I7),(I9) показывает теперь, что вторая сопряженная система V'_{n-1} присоединяется к первой с произволом $2(n-1)$ функций одной переменной. Резюмируем это в виде следующей теоремы:

Т е о р е м а 3. К заданной $(n-1)$-сопряженной системе $V_{n-1} \subset P_n$ можно присоединить с произволом $2(n-1)$ функций одной переменной другую $(n-1)$-сопряженную систему V'_{n-1} так, что в полученной паре $\{V_{n-1}, V'_{n-1}\}$ поверхностей V_{n-1} и V'_{n-1} являются $(n-1)$-сопряженными системами относительно своих сетей двойных линий.

4. Равенства $a^k_{ii} = 0$ (i фиксировано, $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $k \neq i$) выражают условие того, что линия ω^i сети $\sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$ является геодезической в связности ∇. Но так как $\omega^i_n = c^i\omega^i$ и $c^i \neq 0$, то эти же равенства выражают условие того, что линия ω^i_n сети $\sigma'_{n-1} \subset V'_{n-1}$ является геодезической в связности ∇'. Поэтому справедлива

Т е о р е м а 4. Если на поверхности V_{n-1} сеть двойных линий геодезическая (относительно связности ∇), то и на поверхности V'_{n-1} сеть двойных линий является геодезической (относительно связности ∇').

Список литературы

I. Ф и н и к о в С.П. О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей. Мат.сб., I939, т.6, вып.3, с.475-520.

2. Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространствах аффинной связности. - "Известия вузов. Сер. Математика", I974, №5, с.25-3I.