УДК 514.76

О СТРУКТУРЕ ОРБИТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛИСИСТЕМЫ С АБЕЛЕВОЙ ГРУППОЙ УПРАВЛЕНИЯ

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

В работе [1] исследована структура стабилизатора $St(x)$ точки x орбиты динамической полисистемы $\bar{\pi}$, имеющей в качестве группы управления $G(I)$ аддитивную группу $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, где $I=\mathbb{N}$- множество натуральных чисел, $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ — прямая сумма полей $\mathbb{R}$ вещественных чисел, рассматриваемых как векторные пространства над собой. В $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ рассматривается сильнейшая локально выпуклая топология. Топология орбиты $G(I)x$ точки x есть образ указанной топологии $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ относительно отображения $t\to\bar{\pi}(t,x)$. В настоящей работе исследуется алгебраическая и топологическая структура орбиты $G(I)x$.

Заметим, прежде всего, что $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ - морфизм $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}/St(x)\to G(I)x$, полученный факторизацией отображения $t\to\bar{\pi}(t,x)$, по определению топологии орбиты $G(I)x$ является гомеоморфизмом однородного пространства $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}/St(x)$, наделенного фактортопологией, на орбиту $G(I)x$. Поэтому достаточно изучить топологию пространства $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}/St(x)$, являющегося одновременно и топологической группой. Рассмотрим сначала ситуацию в общем случае.

Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность топологических абелевых групп. Обозначим $\mathfrak{B}_n$ - базис фильтра окрестностей единичного элемента $e_n\in G_n$. Пусть

$$G=\bigoplus_{n=1}^{\infty}G_n,\quad G'=\prod_{n=1}^{\infty}G_n.$$

Тогда G есть подгруппа группы G' , состоящая из всех таких последовательностей $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $x_n\in G_n$ для любого n и $x_n=e_n$ для всех n , начиная с некоторого номера. Пусть $\mathfrak{B}_n$ - множество подмножеств группы G вида $G\cap(\prod_{n=1}^{\infty}V_n)$, где $V_n\in\mathfrak{B}_n$ для каждого n . Ясно, что $\mathfrak{B}\neq\varnothing$, т.к. $\mathfrak{B}_n\neq\varnothing$ при любом n . Так как всякое множество $U\in\mathfrak{B}$ содержит единичный элемент $e=(e_n)\in G$, то $\varnothing\notin\mathfrak{B}$. Элементарно проверяется, что если U, $U'\in\mathfrak{B}$, то существует $U''\in\mathfrak{B}$, такое, что $U''\subset U\cap U'$. Это означает, что $\mathfrak{B}$ - базис фильтра в G .

П р е д л о ж е н и е I. Для любого $U\in\mathfrak{B}$ существует:

1) $V\in\mathfrak{B}$, такое, что $V\cdot V\subset U$;

2) $W\in\mathfrak{B}$, такое, что $W^{-1}\subset U$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U=G\cap(\prod\limits_{n=1}^{\infty}U_n)$, где $U_n\in\mathfrak{B}$ для каждого n. Тогда для каждого n существует множество $V_n\in\mathfrak{B}$, такое, что $V_n\cdot V_n\subset U_n$. Положим $V=G\cap(\prod\limits_{n=1}^{\infty}V_n)$. Легко видеть, что $V\in\mathfrak{B}$ и $V\cdot V\subset U$. Кроме того, для каждого n существует множество $W_n\in\mathfrak{B}$, такое, что $W_n^{-1}\subset U_n$. Положим $W=G\cap(\prod\limits_{n=1}^{\infty}W_n)$. Ясно, что $W\in\mathfrak{B}$ и $W^{-1}\subset U$.

Из этого предложения в силу [2] вытекает, что в G существует единственная топология, согласующаяся со структурой группы в G и имеющая $\mathfrak{B}$ фундаментальной системой окрестностей единичного элемента $e\in G$. Для этой топологии фундаментальной системой окрестностей произвольной точки $a\in G$ будет $a\mathfrak{B}=\mathfrak{B}a$. Назовем эту топологию топологией прямой суммы групп G_n. Легко видеть, что в случае конечного семейства групп $G=G'$ и топология прямой суммы в G совпадает с топологией произведения. Если топологии групп G_n отделимы, то $\bigcap\limits_{V\in\mathfrak{B}}V=\{e\}$, откуда следует, что и топология прямой суммы в G отделима.

Обозначим $j_n: G_n\to G$ – канонические вложения групп G_n в прямую сумму G. Для $U=G\cap(\prod\limits_{n=1}^{\infty}U_n)$ имеем $j_n^{-1}(U)=U_n\in\mathfrak{B}_n$ при любом n, откуда следует, что все вложения j_n непрерывны в точках $e_n\in G_n$, а стало быть, непрерывны и на G_n.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $G=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ – прямая сумма топологических абелевых групп G_n, наделенная топологией прямой суммы, G' – топологическая группа, $g: G\to G'$ – гомоморфизм. Для того, чтобы g был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы все гомоморфизмы $g\cdot j_n$, где $n\in\mathbb{N}$, были непрерывными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что все гомоморфизмы $g\cdot j_n$ непрерывны. Пусть V – произвольная окрестность единичного элемента $e'\in G'$. Положим $V_0=V$. Допустим, что для любого $i: 0\le i\le n$ определены окрестности V_i элемента e'. Тогда существует окрестность V_{n+1} элемента e', такая, что $V_{n+1}\cdot V_{n+1}\subset V_n$. Тем самым по индукции определена последовательность $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей элемента $e'\in G'$. Заметим, что $V_{n+1}\subset V_{n+1}\cdot V_{n+1}\subset V_n$ для

любого натурального n. Отсюда следует, что для любого натурального m выполняется $V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_m\subset V_0=V$. Для любого $n\in\mathbb{N}$ в силу непрерывности гомоморфизма $g\circ j_n$ существует окрестность $U_n\in\mathfrak{B}$, такая, что $g(j_n(U_n))\subset V_n$. Положим $U=G\cap(\prod\limits_{n=1}^{\infty}U_n)$. Тогда $U\in\mathfrak{B}$. Пусть $x\in U$. Тогда $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $x_n\in U_n$ для любого n и $x_n=e_n$ для всех n, начиная с некоторого номера m. Тогда

$$x=j_1(x_1)\cdot j_2(x_2)\cdot\ldots\cdot j_m(x_m),\quad g(x)=g(j_1(x_1))\cdot g(j_2(x_2))\cdot\ldots\cdot g(j_m(x_m))\in V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_m\subset V.$$

Отсюда следует, что $g(U)\subset V$, т.е. g непрерывен в единичном элементе $e\in G$, а значит и на G.

Из доказанного следует, что базис фильтра $\mathfrak{B}$ определяет в G сильнейшую топологию, согласующуюся со структурой группы в G, относительно которой все вложения j_n непрерывны. Справедливы следующие предложения.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность топологических абелевых групп, G' – топологическая группа, f_n –непрерывные гомоморфизмы из G_n в G' для каждого n

$$G=\bigoplus_{n=1}^{\infty}G_n,\qquad j_n: G_n\to G$$

-канонические вложения, $g: G\to G'$ – гомоморфизм, для которого $g\cdot j_n=f_n$ при любом n. Если наделить G топологией прямой суммы, то g непрерывен.

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(G'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательности топологических абелевых групп, f_n — непрерывный гомоморфизм из G_n в G'_n при любом n,

$$G=\bigoplus_{n=1}^{\infty}G_n,\quad G'=\bigoplus_{n=1}^{\infty}G'_n,\quad j_n: G_n\to G,\ j'_n: G'_n\to G'$$

канонические вложения, $g: G\to G'$ – гомоморфизм, для которого $g\circ j_n=j'_n\circ f_n$ при любом n (будем обозначать его $g=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}f_n$). Если наделить G и G' топологиями прямой суммы, то g – непрерывен.

П р е д л о ж е н и е 5. Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность топологических абелевых групп,

$$J\subset\mathbb{N},\quad G=\bigoplus_{n=1}^{\infty}G_n,\quad G_J=\bigoplus_{n\in J}G_n,\quad j_J: G_J\to G$$

-каноническое вложение, $pr_J: G\to G_J$ — проекция. Если наделить G и G_J топологиями прямой суммы, то j_J и pr_J непрерывны.

П р е д л о ж е н и е 6. Пусть $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность топологических абелевых групп, H_n — подгруппа группы

G_n, $p_n : G_n \to G_n/H_n$ – канонический эпиморфизм для каждого n,

$$G=\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n ,\quad G'=\bigoplus_{n=1}^{\infty} (G_n/H_n),\quad q=\bigoplus_{n=1}^{\infty} p_n ,\quad H=\operatorname{Ker} q,$$

$\bar q$ – результат факторизации q по подгруппе H. Если наделить G/H и G_n/H_n для каждого n фактортопологиями, а G и G' – топологиями прямой суммы, то $\bar q$ – изоморфизм топологических групп G/H и G'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как эпиморфизмы p_n непрерывны для каждого n, то и гомоморфизм q непрерывен, а отсюда следует непрерывность $\bar q$. Очевидно, что $\bar q$ – алгебраический изоморфизм. Пусть $U=G\cap(\prod_{n=1}^{\infty} U_n)$ – окрестность единичного элемента $e\in G$, где U_n – открытые окрестности $e_n\in G_n$. Легко проверить, что $q(U)=G'\cap(\prod_{n=1}^{\infty} p_n(U_n))$. Так как в силу [2] p_n – открытые отображения, то $p_n(U_n)$ – открытые окрестности единичных элементов $e'_n\in G/H_n$, а тогда $q(U)$ – окрестность элемента $e'\in G'$. Это означает, что q – строгий морфизм, а, следовательно, $\bar q$ – гомеоморфизм. Тем самым предложение 6 доказано.

Пусть $J\subset \mathbb{N}$. Наделяя векторное пространство $\mathbb{R}^{(J)}$ сильнейшей локально выпуклой топологией, будем обозначать его $\mathbb{R}^{(J)}_0$. Наделяя аддитивную группу $\mathbb{R}^{(J)}$ топологией прямой суммы аддитивных групп $\mathbb{R}$, обозначим ее $\mathbb{R}^{(J)}_1$. Так как всякое вложение $j: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{(J)}_0$ непрерывно, то топология прямой суммы в $\mathbb{R}^{(J)}$ мажорирует сильнейшую локально выпуклую топологию. Рассматривая в $\mathbb{R}$ симметричные окрестности 0, получаем в $\mathbb{R}^{(J)}_1$ фундаментальную систему окрестностей 0, состоящую из абсолютно выпуклых окрестностей. Отсюда следует, что сильнейшая локально выпуклая топология в $\mathbb{R}^{(J)}$ мажорирует топологию прямой суммы. В итоге получаем, что указанные топологии в $\mathbb{R}^{(J)}$ совпадают.

Пусть I, J – непересекающиеся подмножества в $\mathbb{N}$. Тогда согласно [1] $\mathbb{R}^{(I)}\oplus\mathbb{Z}^{(J)}$ – замкнутая подгруппа группы $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Более того, всякая замкнутая подгруппа в $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ имеет такой вид. В силу [3] можно считать, что $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}=\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}\oplus\mathbb{R}^{(J)}$, где $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}$ и $\mathbb{R}^{(J)}$ наделены сильнейшими локально выпуклыми топологиями

$$\mathbb{R}^{(I)}\subset\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)},\quad \mathbb{Z}^{(J)}\subset\mathbb{R}^{(J)}$$

Обозначим

$$p_1: \mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}\to\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}/\mathbb{R}^{(I)},\quad p_2: \mathbb{R}^{(J)}\to\mathbb{R}^{(J)}/\mathbb{Z}^{(J)}$$

-канонические эпиморфизмы. Ясно, что $\operatorname{Ker}(p_1\oplus p_2)=\mathbb{R}^{(I)}\oplus\mathbb{Z}^{(J)}$. Пусть

q – результат факторизации гомоморфизма $p_1\oplus p_2$ по ядру $\operatorname{Ker}(p_1\oplus p_2)$. Тогда в силу [2] q – изоморфизм топологических групп

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}/(\mathbb{R}^{(I)}\oplus\mathbb{Z}^{(J)}),\quad (\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}/\mathbb{R}^{(I)})\oplus(\mathbb{R}^{(J)}/\mathbb{Z}^{(J)}).$$

Из свойств сильнейшей локально выпуклой топологии [3] вытекает, что существует алгебраический и топологический изоморфизм q_1 локально выпуклых пространств (а значит и топологических групп)

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}/\mathbb{R}^{(I)},\quad \mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus(J\cup I))}$$

Из свойств топологии прямой суммы топологических групп следует, что если наделить $\mathbb{T}^{(J)}$ (где $\mathbb{T}$ – одномерный тор) топологией прямой суммы, то существует изоморфизм q_2 топологических групп $\mathbb{R}^{(J)}/\mathbb{Z}^{(J)}$ и $\mathbb{T}^{(J)}$. Но тогда $q_1\oplus q_2$ – изоморфизм топологических групп

$$(\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus J)}/\mathbb{R}^{(I)})\oplus(\mathbb{R}^{(J)}/\mathbb{Z}^{(J)}),\quad \mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus(J\cup I))}\oplus\mathbb{T}^{(J)}.$$

В итоге топологические группы

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}/(\mathbb{R}^{(I)}\oplus\mathbb{Z}^{(J)}),\qquad \mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus(J\cup I))}\oplus\mathbb{T}^{(J)}$$

изоморфны. Значит, орбита $G(I)x$ точки x гомеоморфна $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus(J\cup I))}\oplus\mathbb{T}^{(J)}$.

Если множество $\mathbb{N}\setminus(J\cup I)$ не является конечным, то $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}\setminus(J\cup I))}$, очевидно, не является локально компактным пространством. Так как $\mathbb{Z}^{(J)}$ – дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^{(J)}$, то в силу [2] $\mathbb{R}^{(J)}/\mathbb{Z}^{(J)}\approx\mathbb{T}^{(J)}$ локально изоморфна $\mathbb{R}^{(J)}$. Отсюда следует, что если J не является конечным множеством, то $\mathbb{T}^{(J)}$ не является локально компактной группой. Таким образом, если хотя бы одно из множеств $\mathbb{N}\setminus(J\cup I)$ или J не является конечным, то орбита $G(I)x$ не является локально компактным пространством в рассматриваемой топологии и, стало быть, не является конечномерным многообразием.

Библиографический список

1. А л е ш н и к о в С.И. О динамических полисистемах с абелевой группой управления // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.5-10.

2. Б у р б а к и Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1989. 392с.

3. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359 с.

УДК 514.75

ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕЕВКЛИДОВА МЕТРИКА

Н.В.А м и ш е в а

(Кемеровский государственный университет)

Известно, что геометрия возникла в глубокой древности и связана с измерением длин отрезков. Безуспешные попытки доказать пятый постулат Евклида привели к открытию новой, неевклидовой геометрии, основателем которой был Лобачевский. Риман стал изучать произвольные, так называемые римановы пространства, нашедшие важные приложения в механике, теории относительности и других науках. В данной статье доказывается, что задание тангенциально вырожденной поверхности в аффинном пространстве порождает неевклидову метрику всего пространства.

Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве m-мерную тангенциально вырожденную поверхность ранга r [1], которую обозначим V_r^m. Деривационные формулы подвижного репера $\{A, e_I\}$ $(I, J = 1, \dots, n)$ аффинного пространства имеют вид $dA = \omega^I e_I$, $de_I = \omega_I^J e_J$, где ω^I, ω_I^J – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства.

Т е о р е м а. Задание любой тангенциально вырожденной m-поверхности V_r^m ранга r $(r \neq m-1)$ в аффинном пространстве определяет в этом пространстве метрику, т.е. пространство становится псевдоримановым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать абсолют в виде $b_{IJ} x^I x^J = 1$, считая, что центр абсолюта совпадает с началом координат, которое помещено в образующую плоскость поверхности V_r^m. Если векторы $e_1, \dots, e_m$ направить параллельно касательной плоскости L_m поверхности, а векторы $e_1, \dots, e_{m-r}$ параллельно образующей плоскости L_{m-r} этой поверхности, то дифференциальные уравнения тангенциально вырожденной поверхности примут вид:

$$\omega^i = 0, \quad \omega_a^i = 0, \quad \omega_p^i = \Lambda_{pq}^i \omega^q, \quad \omega_a^p = \Lambda_{aq}^p \omega^q \qquad (1)$$

$$(a, b = \overline{1, m-r}; \quad p, q = m-r+1, \dots, m; \quad \sigma = \overline{1, m}; \quad i, j = m+1, \dots, n),$$

причем коэффициенты связаны соотношениями:

$$\Lambda_{pq}^i = \Lambda_{qp}^i, \quad \Lambda_{aq}^p \Lambda_{ps}^i = \Lambda_{as}^p \Lambda_{pq}^i.$$

Известно, что в каждой образующей плоскости поверхности имеется фокусная алгебраическая поверхность F [1], [2], определяемая уравнениями:

$$x^i = 0, \quad x^p = 0, \quad \det \| \Lambda_{aq}^p x^a + \delta_q^p \| = 0. \qquad (2)$$

Если ранг $r \geqslant 2$, то полярой порядка $r-2$ начала координат относительно поверхности F является квадрика Q_{m-r-1}:

$$x^i = 0, \ x^p = 0, \ \Gamma_{(a,b)} x^a x^b + \Gamma_a x^a = 1,$$

где $\Gamma_{(a,b)}$, Γ_a выражаются через величины Λ_{aq}^p [3]. Линейной же полярой для начала координат относительно F есть плоскость

$$\pi_{m-r-1}: \quad x^i = 0, \ x^p = 0, \ \Gamma_a x^a = 1.$$

Если $r=1$, то фокусная алгебраическая поверхность F является $(m-r-1)$-плоскостью, которую также обозначим π_{m-r-1}. Выберем координатную плоскость $L_{m-r-1} = \{e_2, \dots, e_{m-r}\}$ параллельно плоскости π_{m-r-1}, а вектор e_1 направим по касательной к кривой Γ, лежащей в образующей плоскости, при движении вдоль которой плоскость L_{m-r-1} остается неизменной. Так как плоскость L_{m-r-1} можно построить в любой точке образующей плоскости, то можно говорить о распределении Δ_{m-r-1}, определенном в образующей плоскости и ставящем в соответствие каждой точке этой плоскости $(m-r-1)$-плоскость L_{m-r-1}. Выбор вектора e_1, исключает из рассмотрения случай, когда характеристика плоскости L_{m-r-1} вдоль распределения Δ_{m-r-1} ненулевая. Конец вектора e_1 поместим в точку A_1 пересечения касательной к кривой Γ с плоскостью π_{m-r-1}. В работе [4] было проведено построение плоскости L_r, трансверсальной образующей плоскости. Считая, что эта плоскость уже построена, направим векторы $e_{m-r+1}, \dots, e_m$ параллельно плоскости L_r. Такая фиксация репера приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \omega_p^a = \Lambda_{pb}^a \omega^b + \Lambda_{pq}^a \omega^q, \quad \omega_1^a = \Lambda_{1b}^a \omega^b + \Lambda_{1q}^a \omega^q, \\ \omega_{a'}^1 = \Lambda_{a'b}^1 \omega^b + \Lambda_{a'q}^1 \omega^q \qquad (a', b' = 2, \dots, m-r), \end{cases} \qquad (3)$$

коэффициенты которых связаны соотношениями: