УДК 514

О. О. Белова

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Кручение групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей

В n-мерном проективном пространстве исследуется пространство Π центрированных m-мерных плоскостей $\overset{*}{L}_m$. Тремя способами введены объекты кручения групповой подсвязности в расслоении, ассоциированном с пространством Π. Показано, что в двух случаях объекты кручения образуют квазитензоры, а в третьем случае введенный объект — тензор. Этот тензор кручения, как и квазитензоры кручения, не может быть равен нулю, т. е. подсвязность всегда с кручением.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, связность, квазитензор кручения, тензор кручения.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I,... = \overline{1, n}$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I\,,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A\,,$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \end{gathered} \tag{1}$$

В пространстве P_n рассмотрим пространство Π [1] центрированных m-мерных плоскостей $L_m^* = \{A, L_m\}$, где L_m — m-мерная плоскость, A — точка подвижного репера, помещенная в центр плоскости. Производя дальнейшую специализацию подвижного репера (помещая вершины A_a на плоскость L_m^*), получаем уравнения стационарности плоскости L_m^*: $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega_a^\alpha = 0$. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения: $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$.

При указанной специализации подвижного репера структурные уравнения (1) для базисных форм принимают вид

$$
\begin{gathered}
D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \omega_a^\alpha + \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \\
D\omega_a^\alpha = \omega_a^b \wedge \omega_b^\alpha + \omega_a^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega_a \wedge \omega^\alpha, \qquad (2) \\
D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^a.
\end{gathered}
$$

Над пространством Π возникает главное расслоение $G^*(\Pi)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости L_m^*. Главное расслоение содержит некоторое максимальное фактор-расслоение [1], составленное из фактор-расслоения коаффинных реперов и аффинного фактор-расслоения.

В главном расслоении $G^*(\Pi)$ задается фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - L_{b\alpha}^a \omega^\alpha - L_{bc}^a \omega^c - \Gamma_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha, \\
\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - L_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta a}^\alpha \omega^a - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma, \\
\tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - L_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha b}^a \omega^b - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \\
\tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha} \omega^\alpha - \Gamma_{ab} \omega^b - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha, \\
\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Gamma_{\alpha b} \omega^b - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta.
\end{gathered}
$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [2], связность в ассоциированном расслоении $G^*(\Pi)$ определяется с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha b}, \Pi^a_{\alpha\beta}\},$$

$$\Gamma_1 = \{L^a_{b\alpha}, L^a_{bc}, \Gamma^{ac}_{b\alpha}, L^\alpha_{\beta\gamma}, L^\alpha_{\beta a}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}, L^a_{\alpha\beta}, L^a_{\alpha b}, \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}, \Gamma_{a\alpha}, \Gamma_{ab}, \Pi^b_{a\alpha}\}$$

на базе Π следующими сравнениями:

$$\begin{gathered}
\Delta L^a_{b\alpha} - L^a_{bc}\omega^c_\alpha - \delta^a_b\omega_\alpha + \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega_c \equiv 0,\ \Delta L^a_{bc} - \delta^a_c\omega_b - \delta^a_b\omega_c \equiv 0,\\
\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} + \delta^c_b\omega^a_\alpha \equiv 0,\ \Delta\Gamma_{a\alpha} - \Gamma_{ab}\omega^b_\alpha + (\Pi^b_{a\alpha} + L^b_{a\alpha})\omega_b \equiv 0,\\
\Delta\Gamma_{ab} + L^c_{ab}\omega_c \equiv 0,\ \Delta\Pi^b_{a\alpha} + \delta^b_a\omega_\alpha + \Gamma^{cb}_{a\alpha}\omega_c \equiv 0,\\
\Delta L^a_{\alpha\beta} - L^a_{\alpha b}\omega^b_\beta + \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b - L^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + L^\gamma_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0,\\
\Delta L^a_{\alpha b} - L^a_{cb}\omega^c_\alpha + L^\beta_{\alpha b}\omega^a_\beta - \delta^a_b\omega_\alpha \equiv 0,\\
\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} - \Gamma^{ab}_{d\beta}\omega^d_\alpha + \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0, \qquad (3)\\
\Delta L^\alpha_{\beta\gamma} - L^\alpha_{\beta a}\omega^a_\gamma + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta \equiv 0,\\
\Delta L^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta\omega_a \equiv 0,\ \Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta \equiv 0,\\
\Delta\Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha a}\omega^a_\beta + \Pi^a_{\alpha\beta}\omega_a + L^a_{\alpha\beta}\omega_a - \Gamma_{a\beta}\omega^a_\alpha + L^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0,\\
\Delta\Gamma_{\alpha a} - \Gamma_{ba}\omega^b_\alpha + L^b_{\alpha a}\omega_b + L^\beta_{\alpha a}\omega_\beta \equiv 0,\\
\Delta\Pi^a_{\alpha\beta} + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b - \Pi^a_{c\beta}\omega^c_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0.
\end{gathered}$$

Подобъект Γ_1 определяет связность в максимальном фактор-расслоении.

Подставляя в структурные уравнения (2) базисных форм ω^α, ω^a, ω^α_a пространства Π формы связности $\tilde\omega^a_b$, $\tilde\omega^\alpha_\beta$, $\tilde\omega_a$, $\tilde\omega^a_\alpha$, приходим к следующим уравнениям:

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \tilde\omega^\alpha_\beta + \underline{\omega^a \wedge \omega^\alpha_a} + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a +$$
$$+S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_a^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha - \omega_b^\alpha \wedge \tilde{\omega}_a^b - \omega^\alpha \wedge \tilde{\omega}_a + S^\alpha_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \qquad (4)$$

$$+S^\alpha_{a\beta b}\omega^\beta \wedge \omega^b + S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega_b^\gamma + S^{\alpha c}_{ab\beta}\omega^b \wedge \omega_c^\beta + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma ,$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + \omega^\alpha \wedge \tilde{\omega}_\alpha^a + S^a_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + S^a_{\alpha b}\omega^\alpha \wedge \omega^b +$$

$$+S^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega_b^\beta + S^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + S^{ac}_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega_c^\alpha ,$$

где компоненты объекта неполного кручения S [3] выражаются по формулам

$$S^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{[\beta\gamma]},\ S^\alpha_{\beta a} = L^\alpha_{\beta a},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma},$$

$$S^\alpha_{a\beta\gamma} = -\delta^\alpha_{[\beta}\Gamma_{a\gamma]},\ S^\alpha_{a\beta b} = -\delta^\alpha_\beta\Gamma_{ab},$$

$$S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma L^b_{a\beta} - \delta^b_a L^\alpha_{\gamma\beta} - \delta^\alpha_\beta \Pi^b_{a\gamma},\ S^{\alpha c}_{ab\beta} = \delta^\alpha_\beta L^c_{ab} - \delta^c_a L^\alpha_{\beta b},$$

$$S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = \delta_a^{\lceil b}\Gamma^{\alpha\ c\rceil}_{\lfloor\beta\ \gamma\rfloor} - \delta^\alpha_{\lfloor\beta}\Gamma^{\lceil b\ c\rceil}_{a\ \gamma\rfloor},$$

$$S^a_{\alpha\beta} = L^a_{[\alpha\beta]},\ S^a_{\alpha b} = L^a_{\alpha b} - L^a_{b\alpha},\ S^{ab}_{\alpha\beta} = \Gamma^{ab}_{\alpha\beta},\ S^a_{bc} = L^a_{[bc]},\ S^{ac}_{b\alpha} = \Gamma^{ac}_{b\alpha},$$

здесь квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам и парам индексов.

Подчеркнутое слагаемое в уравнении (4_1) можно представить несколькими способами.

1-й способ:

$$\omega^a \wedge \omega_a^\alpha = \delta^\alpha_\beta \omega^a \wedge \omega_a^\beta .$$

Тогда уравнение (4_1) примет вид

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha + S^\alpha_\beta \omega^a \wedge \omega_a^\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a +$$

$$+S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega_a^\gamma ,$$

где к объекту неполного кручения S добавятся компоненты $S^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$.

Учитывая дифференциальные сравнения (3) компонент подобъекта связности $Г$, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм:

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} - S^{\alpha}_{[\beta a}\omega^{a}_{\gamma]} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{\beta a} - S^{\alpha}_{\beta}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - S^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha}_{a[\beta b}\omega^{b}_{\gamma]} + S^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_b - S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha}_{a\beta b} - S^{\alpha c}_{ab\beta}\omega_c - S^{\alpha}_{\beta b}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha b}_{ac\gamma}\omega^{c}_{\beta} + 2S^{\alpha cb}_{a\beta\gamma}\omega_c - S^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha c}_{ab\beta} - \delta^{c}_{b}S^{\alpha}_{\beta}\omega_a \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{a}_{\alpha\beta} - S^{a}_{[\alpha b}\omega^{b}_{\beta]} + S^{ab}_{[\alpha\beta]}\omega_b + S^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega^{a}_{\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{a}_{\alpha b} + 2S^{a}_{bc}\omega^{c}_{\alpha} + S^{\beta}_{\alpha b}\omega^{a}_{\beta} - S^{ac}_{b\alpha}\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta S^{ab}_{\alpha\beta} - S^{ab}_{c\beta}\omega^{c}_{\alpha} + S^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^{a}_{\gamma} \equiv 0,\ \Delta S^{a}_{bc} \equiv 0,\ \Delta S^{ac}_{b\alpha} + \delta^{c}_{b}\omega^{a}_{\alpha} \equiv 0.$$

Введем обозначение

$$S' = \{S^{\alpha}_{\beta\gamma}, S^{\alpha}_{\beta a}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha}_{a\beta b}, S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha c}_{a\beta b}, S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, S^{a}_{\alpha\beta}, S^{a}_{\alpha b}, S^{ab}_{\alpha\beta}, S^{a}_{bc}, S^{ac}_{b\alpha}\}.$$

Теорема 1. *Объект кручения* $S' = \{S^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, S\}$ *подсвязности* Γ_1 *образует квазитензор, содержащий один простейший [4] подквазитензор* $\{S^{ac}_{b\alpha}\}$, *три простейших подтензора* $\{S^{\alpha}_{\beta}\}$[1], $\{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\}$, $\{S^{a}_{bc}\}$ *и пять простых подтензоров* $\{S^{\alpha}_{\beta}, S^{\alpha}_{\beta a}\}$, $\{S^{\alpha}_{\beta}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, $\{S^{\alpha}_{\beta}, S^{\alpha c}_{ab\beta}\}$, $\{S^{\alpha}_{\beta\gamma}, S^{\alpha}_{\beta a}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, $\{S^{\alpha}_{\beta b}, S^{\alpha c}_{ab\beta}, S^{\alpha}_{a\beta b}\}$.

2-й способ:

$$\omega^{a} \wedge \omega^{\alpha}_{a} = \delta^{a}_{b}\omega^{b} \wedge \omega^{\alpha}_{a}.$$

Тогда уравнение (4_1) примет вид

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} + S^{a}_{b}\omega^{b} \wedge \omega^{\alpha}_{a} + S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + S^{\alpha}_{\beta a}\omega^{\beta} \wedge \omega^{a} + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{a},$$

где к объекту неполного кручения S добавятся компоненты $S^{a}_{b} = \delta^{a}_{b}$.

---

[1] δ-символ (символ Кронекера) является примером смешанного тензора [5, с. 11; 6, с. 59—60; 7, с. 4—5; 8, с. 167; 9, с. 50; 10, с. 19, 113; 11, с. 76; 12, с. 14—15].

Учитывая дифференциальные сравнения (3) компонент объекта связности Γ, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм:

$$\Delta S^a_b \equiv 0\,,\ \Delta S^\alpha_{\beta\gamma} - S^\alpha_{[\beta a}\omega^a_{\gamma]} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a \equiv 0\,,\ \Delta S^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta\,\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\,\omega^a_\beta \equiv 0\,,\ \Delta S^\alpha_{a\beta\gamma} - S^\alpha_{a[\beta b}\omega^b_{\gamma]} + S^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_b - S^\alpha_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^\alpha_{a\beta b} - S^{\alpha c}_{ab\beta}\omega_c - S^\alpha_{\beta b}\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha b}_{ac\gamma}\omega^c_\beta + 2S^{\alpha cb}_{a\beta\gamma}\omega_c - S^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha c}_{ab\beta} - \delta^\alpha_\beta S^c_b\omega_a \equiv 0\,,\ \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^a_{\alpha\beta} - S^a_{[\alpha b}\omega^b_{\beta]} + S^{ab}_{[\alpha\beta]}\omega_b + S^\gamma_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^a_{\alpha b} + 2S^a_{bc}\omega^c_\alpha + S^\beta_{\alpha b}\omega^a_\beta - S^{ac}_{b\alpha}\omega_c \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{ab}_{\alpha\beta} - S^{ab}_{c\beta}\omega^c_\alpha + S^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0\,,\ \Delta S^a_{bc} \equiv 0\,,\ \Delta S^{ac}_{b\alpha} + S^c_b\omega^a_\alpha \equiv 0\,.$$

Теорема 2. *Объект кручения* $S'' = \{S^a_b = \delta^a_b, S\}$ *подсвязности* Γ_1 *образует квазитензор, содержащий два простейших подквазитензора* $\{S^\alpha_{\beta a}\}$, $\{S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, *три простейших подтензора* $\{S^a_b\}$, $\{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\}$, $\{S^a_{bc}\}$, *три простых подтензора* $\{S^a_b, S^{\alpha b}_{ac\beta}\}$, $\{S^a_b, S^{ac}_{b\alpha}\}$ *и три простых подквазитензора* $\{S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^\alpha_{\beta a}, S^\alpha_{\beta\gamma}\}$, $\{S^{ac}_{b\alpha}, S^\beta_{\alpha b}, S^a_{bc}, S^a_{\alpha b}\}$, $\{S^{\gamma b}_{\alpha\beta}, S^{ab}_{c\beta}, S^{ab}_{\alpha\beta}\}$.

3-й способ:

$$\omega^a \wedge \omega^\alpha_a = \delta^\alpha_\beta\delta^a_b\,\omega^b \wedge \omega^\beta_a\,.$$

Тогда уравнение (4_1) примет вид

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \tilde\omega^\alpha_\beta + S^{\alpha a}_{\beta b}\omega^b \wedge \omega^\beta_a + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a +$$
$$+ S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a\,,$$

где к объекту неполного кручения S добавятся компоненты $S^{\alpha a}_{\beta b} = \delta^\alpha_\beta\delta^a_b$.

Учитывая дифференциальные сравнения (3) компонент объекта связности *Г*, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм:

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} - S^{\alpha}_{[\beta a}\omega^{a}_{\gamma]} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a \equiv 0\,,\ \Delta S^{\alpha}_{\beta a} - S^{\alpha b}_{\beta a}\omega_b \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - S^{\alpha a}_{\gamma b}\omega^{b}_{\beta} \equiv 0\,,\ \Delta S^{\alpha a}_{\beta b} \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha}_{a[\beta b}\omega^{b}_{\gamma]} + S^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_b - S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha}_{a\beta b} - S^{\alpha c}_{ab\beta}\omega_c - S^{\alpha}_{\beta b}\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha b}_{ac\gamma}\omega^{c}_{\beta} + 2S^{\alpha cb}_{a\beta\gamma}\omega_c - S^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{\alpha c}_{ab\beta} - S^{\alpha c}_{\beta b}\omega_a \equiv 0\,,\ \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{a}_{\alpha\beta} - S^{a}_{[\alpha b}\omega^{b}_{\beta]} + S^{ab}_{[\alpha\beta]}\omega_b + S^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega^{a}_{\gamma} \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{a}_{\alpha b} + 2S^{a}_{bc}\omega^{c}_{\alpha} + S^{\beta}_{\alpha b}\omega^{a}_{\beta} - S^{ac}_{b\alpha}\omega_c \equiv 0\,,$$

$$\Delta S^{ab}_{\alpha\beta} - S^{ab}_{c\beta}\omega^{c}_{\alpha} + S^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^{a}_{\gamma} \equiv 0\,,\ \Delta S^{a}_{bc} \equiv 0\,,\ \Delta S^{ac}_{b\alpha} + S^{\beta c}_{\alpha b}\omega^{a}_{\beta} \equiv 0\,.$$

Теорема 3. *Объект кручения* $S''' = \{S^{\alpha a}_{\beta b} = \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{a}_{b}, S\}$ *подсвязности* Γ_1 *образует тензор, содержащий три простейших подтензора* $\{S^{\alpha a}_{\beta b}\}$, $\{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\}$, $\{S^{a}_{bc}\}$ *и четыре простых подтензора* $\{S^{\alpha a}_{\beta b}, S^{\alpha}_{\beta a}\}$, $\{S^{\alpha a}_{\beta b}, S^{\alpha a}_{\gamma\beta}\}$, $\{S^{\alpha a}_{\beta b}, S^{\alpha a}_{cb\beta}\}$, $\{S^{\alpha a}_{\beta b}, S^{\gamma a}_{b\beta}\}$.

Вывод. *Связность в максимальном фактор-расслоении над пространством центрированных плоскостей будет всегда с кручением, так как квазитензоры* S', S'' *и тензор кручения* S''' *нельзя обратить в нуль.*

Список литературы

1. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // Journal of Mathematical Sciences. 2009. Vol. 162, № 5. P. 605—632.

2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

3. *Белова О. О.* Квазитензор кручения групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей // Лаптевские чтения : сб. тр. междунар. геом. семинара им. Г. Ф. Лаптева. Пенза, 2004. С. 5—8.

4. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

5. *Александров В. А.* Тензоры для физика-первокурсника. Новосибирск, 2011. URL: http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/tensor.pdf.

6. *Жилин П. А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве : учеб. пособие. СПб., 2001.

7. *Иванов М. Г.* Введение в тензоры в теории поля : учеб. пособие. М., 2011. URL: http://theorphys.mipt.ru/courses/a_00zil/tensor09w-arpgl3e7yg9.pdf.

8. *Катанаев М. О.* Геометрические методы в математической физике : конспект лекций. М., 2011. URL: http://www.mi.ras. ru/noc/10_11/lectures.16.05.11.pdf.

9. *Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ (с приложениями к геометрии, механике и физике). М., 1963.

10. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967.

11. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред). М., 1971.

12. *Топоногов В. А.* Тензорная алгебра и тензорный анализ : метод. указания. Новосибирск, 1995.

O. Belova

Torsion of the group subconnection in the space of the centered planes

The space Π of the centered m-planes $\overset{*}{L}_m$ is considered in the projective space P_n. By three ways the torsion objects of the subconnection are introduced. It is shown, that in two cases the torsion objects of the subconnection are quasi-tensors and in the third case this object is a tensor. Both the quasi-tensors and this torsion tensor cannot be vanish. This connection is always with torsion.