УДК 514.76

Ю. И. Попов[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-14

Соприкасающиеся гиперквадрики кооснащенной гиперполосы ${}^{s}H_{m}$

В данной работе рассматриваются гиперквадрики, внутренним образом присоединенные к кооснащенной гиперполосе проективного пространства. Кроме того, доказана теорема: нормализация кооснащенной гиперполосы имеет полувнутреннее оснащение тогда и только тогда, когда ее нормали 1-го и 2-го рода полярно сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1}.

Ключевые слова: гиперквадрика, гиперполоса, нормали 1-го и 2-го рода.

В работе используется следующая схема индексов:

$$I, J, K, ... = \overline{0, n};\ \ i, j, k ... = \overline{1, m};\ \ \alpha, \beta, \gamma, ... = \overline{m+1, n-1};$$
$$p, q = \overline{1, r};\ \ a, b, c, ... = \overline{r+1, m}.$$

Гиперквадрика Q_{n-1}, касающаяся гиперплоскости $\tau^{n}(A_0)$ в точке A_0, называется *соприкасающейся гиперквадрикой* гиперполосы ${}^{s}H_{m}$ [1], если она имеет касание 2-го порядка с базисной поверхностью V_m данной гиперполосы.

Поступила в редакцию 22.05.2019 г.

Уравнение невырожденной гиперквадрики Q_{n-1} в точечном репере $\{A_I\}$ запишем в виде

$$\Phi(x,\ x) \equiv g_{IK} x^I x^K = 0. \tag{1}$$

Касание 0-го порядка гиперквадрики Q_{n-1} и поверхности $V_m \subset {}^s H_m$ характеризуется тем, что $A_0 \in Q_{n-1}$, то есть координаты $(1,\ \underbrace{0,\ 0,\ ...,\ 0}_{n})$ точки A_0 удовлетворяют (1), откуда следует

$$g_{00} = 0. \tag{2}$$

Условие $A_0 + dA_0 \in Q_{n-1}$ есть условие касания 1-го порядка гиперквадрики Q_{n-1} с базисной поверхностью V_m. Подставляя координаты $(1+\omega_0^0,\ \ \omega_0^p,\ \ \omega_0^a,\ \ \underbrace{0,\ 0,\ ...,\ 0}_{n-m})$ [1] точки $A_0 + dA_0$ в уравнение (1), находим с учетом уравнения (2), что

$$g_{0a} = 0,\ g_{0p} = 0. \tag{3}$$

Так как гиперплоскость $\tau^n(A_0)$ есть касательная гиперплоскость гиперквадрики Q_{n-1}, то точка A_0 полярно сопряжена со всеми точками гиперплоскости τ^n, и в частности с точками $\{A_\alpha\} \subset \tau^n$. Из условия $\Phi(x_{A_0}, y_{A_\alpha}) = 0$ полярной сопряженности точек A_0 и A_α, где $\Phi(x, y)$ — билинейная форма данной квадратичной формы $\Phi(x, x)$, получаем

$$g_{0\alpha} = 0. \tag{4}$$

Потребуем, чтобы квадрика Q_{n-1} имела касание 2-го порядка с базисной поверхностью $V_m \subset {}^s H_m$, то есть чтобы

$$\overline{A} = \left(A_0 + dA_0 + \tfrac{1}{2} d^2 A_0\right) \in Q_{n-1}.$$

Из равенства

$$\Phi(x_{\bar{A}}, x_{\bar{A}}) = 0 \qquad (5)$$

получаем [1]

$$g_{ij} + g_{0n} a_{ij}^{n} = 0. \qquad (6)$$

За счет нормировки коэффициентов уравнения невырожденной гиперквадрики Q_{n-1} можно добиться того, чтобы

$$g_{0n} = -1. \qquad (7)$$

Тогда из (6) следует

$$g_{ab} = a_{ab}^{n}, \; g_{pq} = a_{pq}^{n}.$$

Из $\frac{1}{2}(n-m)(n+m+1)$ параметрического семейства соприкасающихся гиперквадрик рассмотрим только те гиперквадрики, относительно которых касательная плоскость $T_m(A_0)$ базисной поверхности V_m и характеристика $X_{n-m-1}(A_0)$ гиперполосы ${}^{s}H_m$ полярно сопряжены, то есть

$$\Phi(x_{A_a}, y_{A_\alpha}) = 0, \; \Phi(x_{A_p}, y_{A_\alpha}) = 0. \qquad (8)$$

Отсюда получаем:

$$g_{a\alpha} = 0, \; g_{p\alpha} = 0. \qquad (9)$$

Из оставшегося $\frac{1}{2}[(n-m)^2 + (n-m)]$ параметрического семейства соприкасающихся гиперквадрик выберем те гиперквадрики, которые инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы G_0 образующего элемента гиперполосы ${}^{s}H_m$. Следовательно, коэффициенты g_{IK} гиперквадрики Q_{n-1} должны удовлетворять условию ее инвариантности [2]:

$$\nabla_{\delta} g_{IK} = \theta g_{IK}.$$

Откуда, учитывая полученные выше соотношения, получаем:

$$\begin{aligned}
&\nabla_\delta g_{pa} + g_{pa}(\pi_0^0 + \pi_n^n) = 0,\\
&\nabla_\delta g_{pq} + g_{pq}(\pi_0^0 + \pi_n^n) = 0,\\
&\nabla_\delta g_{ab} + g_{ab}(\pi_0^0 + \pi_n^n) = 0,\\
&\nabla_\delta g_{pn} + g_{pn}\pi_0^0 + \pi_p^0 = 0,\\
&\nabla_\delta g_{an} + g_{an}\pi_0^0 + \pi_a^0 = 0,\\
&\nabla_\delta g_{\alpha n} + g_{\alpha n}\pi_0^0 + \pi_\alpha^0 - g_{\alpha\beta}\pi_n^\beta = 0,\\
&\delta g_{nn} = g_{nn}(\pi_n^n - \pi_0^0) + 2(g_{n\alpha}\pi_n^\alpha - \pi_n^0).
\end{aligned} \tag{10}$$

Условия (10) инвариантности соприкасающейся гиперквадрики Q_{n-1} удовлетворяются, если построить следующие охваты [1]:

$$g_{ab} = a_{ab}^n,\ g_{pq} = a_{pq}^n,\ g_{pa} = a_{pa}^n,\ g_{an} = t_a, g_{pn} = t_p; \tag{11}$$

$$g_{\alpha n} = h_\alpha,\ g_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta},\ g_{nn} = T_0 + \sigma_1 b_0 + \sigma_2 h_0$$

или охваты вида (11) и следующие:

$$\tilde{g}_{\alpha n} = \lambda_\alpha^0,\ \tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{L}_{\alpha\beta},\ \tilde{g}_{nn} = J_0 + \sigma_1\tilde{b}_0 + \sigma_2 H_0 .$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка образующего элемента* (A_0, τ^n) *гиперполосы* ${}^s H_m$ *внутренним инвариантным образом присоединяются два двухпараметрических пучка полей соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в точечном репере имеют вид*

$$\begin{aligned}
&a_{ij}^n x^i x^j + 2t_a x^a x^n + L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2h_\alpha x^\alpha x^n +\\
&+ (T_0 + \sigma_1 b_0 + \sigma_2 h_0)(x^n)^2 = 2x^0 x^n,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&a_{ij}^n x^i x^j + 2t_p x^p x^n + \tilde{L}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2H_\alpha x^\alpha x^n +\\
&+ (J_0 + \sigma_1\tilde{b}_0 + \sigma_2 H_0)(x^n)^2 = 2x^0 x^n,
\end{aligned} \tag{13}$$

где σ_1 и σ_2 — инвариантные параметры.

Далее квадрику, заданную уравнением (12), будем обозначать Q_{n-1}, а квадрику, заданную уравнением (13), — $\hat{Q}_{n-1}$.

Исходя из полученных выше данных, все теоремы, полученные для Q_{n-1}, аналогичным образом могут быть доказаны и для $\hat{Q}_{n-1}$.

1. Рассмотрим класс гиперквадрик, для которых плоскость $N_{m-1}(A_0)$ и плоскость Картана сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1} (12), то есть выполняются условия (8, 9) и

$$\Phi(x_{M_a}, y_{M_n}) = 0,\ \Phi(x_{M_p}, y_{M_n}) = 0.$$

Откуда получаем:

$$\nu_a^0 + \nu_p^0 \nu_a^p = 0,\ \nu_p^0 = 0. \qquad (14)$$

Из (14) следует, что

$$M_p \equiv A_p, \qquad (15)$$

$$\mathrm{M_a} \equiv \mathrm{A_a} + \nu_\mathrm{a}^\mathrm{p} \mathrm{A_p}.$$

Учитывая (1—3, 5, 7, 8, 15), находим:

$$g_{an} = 0,\ g_{pn} = 0. \qquad (16)$$

С учетом (11) получим:

$$t_a = 0,\ t_p = 0. \qquad (17)$$

2. Докажем теперь, что если $t_i = 0$, то нормаль 2-го рода $N_{m-1}(A_0) = [A_a, A_p]$ и плоскость Картана сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1} (12). Действительно, с учетом (17) и (11) получаем (16), что означает, что точки A_a и A_p сопряжены с точкой A_n относительно Q_{n-1} (12). С учетом (1—4, 9) находим, что

$$\Phi(x_{A_a}, y_{M_n}) = 0,\ \Phi(x_{A_p}, y_{M_n}) = 0.$$

В силу пунктов 1, 2 и равенств (3), гиперквадрику приводим к виду

$$\begin{aligned} & a_{ij}^n x^i x^j + \widetilde{L}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2H_\alpha x^\alpha x^n + \\ & + (\sigma_1 \widetilde{b}_0 + \sigma_2 H_0 - \lambda_n^\alpha h_\alpha)(x^n)^2 = 2x^0 x^n. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы нормально s-кооснащенная регулярная гиперполоса* ${}^s H_m$ *имела полувнутреннее оснащение, то есть* $t_i = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы нормаль 1-го рода* $N_{n-m} = [M_0, M_\alpha, M_n]$ *и нормаль 2-го рода* $N_{m-1} = [M_a, M_p]$ *были полярно сопряжены относительно гиперквадрики* Q_{n-1} *(18).*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Кооснащенные гиперполосы проективного пространства. Калининград, 2003. 40 с. Деп. в ВИНИТИ 22.12.2003, №2223-В-2003.

2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос : учеб. пособие. Калининград, 1983.

Yu. Popov[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*

14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia

yurij.popoff2015@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-14

Contigious hyperquadrics of coequipped hyperbands ${}^s\mathrm{H}_\mathrm{m}$

Submitted on May 22, 2019

We consider hyperquadrics that are internally connected to coequipped hyperbands in the projective space. Specifically, a hyperquadric Q_{n-1} tangent to a hyperplane at the point is called a contiguous hyper-

quadric of a hyperband if it has a second-order contact with the base surface of the hyperband. In a the third order differential neighborhood of the forming element of the hyperband, two two-parameter bundles of fields of adjoining hyperquadrics are internally invariantly joined, their equations are given in a dot frame. The set of hyperquadrics such that the plane and the plane of Cartan are conjugate with respect to hyperquadric Q_{n-1} is considered. The condition is shown under which the normal of the 2nd kind and the Cartan plane are conjugate with respect to the hyperquadric Q_{n-1}. In addition, the following theorem is proved: normalization of a coequipped regular hyperband has a semi-internal equipment if and only if its normals of the first and second kind are polarly conjugate with respect to the hyperquadric.

Keywords: hyperquadric, hyperband, first- and second-order normals.

References

1. *Popov, Yu. I.:* Equipped hyperbands of projective space. Kaliningrad, 2003. Deposited in VINITI 22.12.2003, №2223-B-2003 (in Russian).

2. *Popov, Yu. I:.* General theory of regular hyperbands. Tutorial. Kaliningrad (1983) (in Russian).