УДК 514.76

В.С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

КОНГРУЭНЦИИ И КОМПЛЕКСЫ КОНИК, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПРОЕКТИВНОЙ СФЕРОЙ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрены гладкие нелинейчатые поверхности S_0, все первые директрисы Вильчинского которых проходят через одну точку (проективные сферы) и поверхности S_1, все такие директрисы которых пересекают одну прямую (проективные поверхности вращения). Исследованы конгруэнции и комплексы невырожденных коник, порождаемые проективной сферой S_0.

§1. Проективные сферы

Рассмотрим в проективном пространстве P_3 гладкую нелинейчатую поверхность S, отнесенную к каноническому реперу С.П. Финикова $\{A_0, A_1, A_2, A_3,\}$ [1, с. 4—7].

Матрица его деривационных формул

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3) \tag{1.1}$$

имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}p_k\omega^k & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ a_k\omega^k & \frac{1}{6}(p_2\omega^2 - p_1\omega^1) & \omega^1 & \omega^2 \\ b_k\omega^k & \omega^2 & \frac{1}{6}(p_1\omega^1 - p_2\omega^2) & \omega^1 \\ b_2\omega^1 + a_1\omega^2 & b_k\omega^k & a_k\omega^k & -\frac{1}{2}p_k\omega^k \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

где

$$\omega^i \overset{\text{def}}{=} \omega_o^i .$$

Здесь и в дальнейшем i,j,k = 1,2; $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Определение 1.1. Проективной сферой называется гладкая нелинейчатая поверхность S_0, все первые директрисы Вильчинского которой проходят через одну точку M, называемую центром проективной сферы.

Исключая из рассмотрения поверхности S_0, с центром A_3, положим

$$M=A_3 - aA_0 \ (a \neq 0). \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. *Проективные сферы существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.*

Доказательство. Из условия $dM = \lambda M$ находим

$$a = a_2 = b_1;\ a_1 = 0,\ b_2 = 0. \tag{1.4}$$

Замкнутая система пфаффовых и квадратичных уравнений поверхностей S_0 приводится к виду

$$p_k\omega^k - 2\omega_0^0 = 0,\ p_1\omega^1 - p_2\omega^2 - 6\omega_2^2 = 0,\ \omega_o^o + \omega_3^3 = 0,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \tag{1.5}$$

$$\omega_i^j = \omega^i,\ \omega_i^3 = \omega^j, \omega_o^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0,\ \omega_i^0 = a\omega^j,\ \omega_3^i = \omega_j^0,\ \ da + 2a\omega_0^0 = 0$$

$$dp_k \wedge \omega^k = 0,\ dp_1 \wedge \omega^1 - dp_2 \wedge \omega^2 + (6(1-2a) - 2/3p_1p_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Эта система — в инволюции и определяет проективные сферы с произволом двух функций одного аргумента.

Число $a \neq 0$ назовем радиусом проективной сферы. Обозначим

$$M^*=A_3 + aA_0 \tag{1.6}$$

Определение 1.2. Главной проективной сферой называется проективная сфера S_0 радиуса 1/2.

Теорема 1.2. *Проективная сфера S_0 тогда и только тогда является главной, когда ее радиус постоянен.*

Доказательство. Пусть a = const. Из уравнений (1.5) следует

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ a = 1/2. \tag{1.7}$$

Учитывая равенства (1.7) в уравнениях (1.5), убеждаемся в том, что главные проективные сферы определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Теорема 1.3. *Гладкая нелинейчатая поверхность S тогда и только тогда является проективной сферой, когда любая линейчатая поверхность конгруэнции ее первых директрис Вильчинского (A_0A_3) является торсом.*

Доказательство. Фокусы $\Phi = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_3$ луча A_0A_3 и торсы прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) определяются соответственно уравнениями

$$\lambda_1^2 + (b_1 + a_2)\,\lambda_1\lambda_2 + (a_2 - a_1 b_2)\,\lambda_2^2 = 0, \tag{1.8}$$

$$a_1((\omega^1)^2 + (a_2 - b_1)\omega^1\omega^2 - b_2(\omega^2)^2 = 0. \tag{1.9}$$

В силу условий (1.4) уравнение (1.9) является тождеством. Наоборот, если уравнение (1.9) тождественно обращается в нуль, то выполняются условия (1.4), характеризующие проективные сферы.

Теорема 1.4. *Гладкая нелинейчатая поверхность S, не являющаяся проективной сферой, тогда и только тогда является поверхностью пары Годо [1, с. 13], когда торсы прямолинейной конгруэнции ее первых директрис Вильчинского высекают на S сеть асимптотических линий.*

Доказательство. Пусть S — поверхность пары Годо, т. е.

$$a_1 = 0,\ b_2 = 0. \tag{1.10}$$

Уравнение торсов (1.9) приводится к виду:

$$(a_2 - b_1)\omega^1\omega^2 = 0. \tag{1.11}$$

Если S не является проективной сферой, то $a_2 - b_1 \neq 0$ и уравнение (1.11) определяет на S сеть асимптотических линий.

Наоборот, если уравнение (1.9) определяет на S сеть асимптотических линий, то $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_2 - b_1 \neq 0$, т. е. поверхность S есть поверхность пары Годо, не являющейся проективной сферой. Из уравнений (1.5) непосредственно следует:

Теорема 1.5. *Проективная сфера является поверхностью пары Годо. Вторая поверхность $\widetilde{S}_0 \equiv (A_3)$ также является проективной сферой с радиусом 1/a. Плоскость ($A_1A_2M^*$), порожденная проективными сферами S_0 и $\widetilde{S}_0$, стационарна.*

Замечание. Так как проективная сфера S_0 является поверхностью пары Годо, то она обладает следующими свойствами: 1) прямые Демулена [1, с.11] проективной сферы S_0 совпадают; 2) прямые A_3A_i являются асимптотическими касательными поверхности $\widetilde{S}_0$, причем асимптотические линии на поверхностях S_o и $\widetilde{S}_0$ соответствуют; 3) квадрика Ли поверхности S_0 в точке A_0 является также квадрикой Ли поверхности $\widetilde{S}_0$ в точке A_3; 4) репер $\{A_\alpha\}$ является репером С.П. Финикова как для проективной сферы S_o, так и для проективной сферы $\widetilde{S}_0$.

§2. Проективные поверхности вращения

Характеристическим признаком поверхности вращения в евклидовом пространстве является то, что все ее нормали пересекают одну прямую — ось вращения.

Это позволяет для проективного пространства P_3 ввести следующее определение.

Определение 2.1. Гладкая нелинейчатая поверхность S_1 называется проективной поверхностью вращения, если все ее первые директрисы Вильчинского пересекают одну прямую, называемую осью вращения.

Теорема 2.1. *Проективные поверхности вращения существуют и определяются с произволом четырех функций одного аргумента.*

Доказательство. Пусть прямая $l \equiv MN$, где

$$M = A_3 - tA_0,\ N=A_2 + n_0A_0 + n_1A_1 \tag{2.1}$$

— ось вращения.

Из условия

$$d[MN]=\lambda[MN] \tag{2.2}$$

следует, что

$$\begin{aligned}
&\omega_3^1 = n_1\omega_3^2 + t(\omega^1 - n_1\omega^2),\\
&dt = \omega_3^0 - n_0\omega_3^2 + 2t\omega_3^3 + tn_0\omega^2,\\
&dn_0 = n_0(\omega_2^2 - \omega_0^0) + (n_0n_1 - t)\omega^1 + (n_0^2 - tn_1)\omega^2 - \omega_2^0 - n_1\omega_1^0,\\
&dn_1 = (n_1^2 - n_0)\omega^1 + (n_0n_1 - 1)\omega^2 + 2n_1\omega_2^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В силу теоремы Пуанкаре о тождественном обращении в нуль внешнего дифференциала от дифференциала внешней формы (в частности, формы Пфаффа) система (2.3) вполне интегрируема.

Из последнего уравнения этой системы следует, что

$$n_1 \neq 0. \tag{2.4}$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений поверхности S_1 состоит из уравнений (2.3), пфаффовых уравнений

$$\begin{gathered}2\omega_0^0 = p_k\omega^k,\ p_1\omega^1 - p_2\omega^2 - 6\omega_2^2 = 0,\ \ \omega_0^3 = 0,\ \omega_1^2 = \omega^1,\ \omega_2^1 = \omega^2,\\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\\ \omega_1^0 = a_k\omega^k,\ \omega_2^0 = \omega_3^1,\ \omega_1^0 = \omega_3^2,\ \ \omega_i^3 = \omega^j,\ \omega_3^0 = n_1(a_2 - t)\omega^1 + a_1\omega^2\end{gathered} \tag{2.5}$$

и внешних квадратичных уравнений

$$\begin{gathered}dp_k \wedge \omega^k + 2(a_1n_1 + t - a_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,\\ dp_1 \wedge \omega^1 - dp_2 \wedge \omega^2 - 6(n_1a_1 + t + a_2 - 1 + \frac{1}{9}p_1p_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,\\ da_1 \wedge \omega^1 + da_2 \wedge \omega^2 + (a_2p_1 - \frac{2}{3}a_1p_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,\\ n_1da_2 \wedge \omega^1 + da_1 \wedge \omega^2 - (2a_2n_1n_0 - a_2 + p_2a_2n_1 - 2tn_1n_0 + t -\\ - tn_1p_1 - n_1a_1 - \frac{4}{3}a_1p_1)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Анализируя эту систему, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 2.2. *Если поверхность S_1 образует пару Годо, то она является проективной сферой S_1.*

Доказательство. Пара Годо характеризуется уравнением

$$\omega_3^0 = 0\,. \tag{2.7}$$

Из последнего уравнения системы (2.5) и неравенства (2.4) следует, что

$$a_1 = 0,\ a_2 = t. \tag{2.8}$$

Учитывая в уравнениях (2.3) эти равенства, находим

$$\omega_3^1 = a_2\omega^1. \tag{2.9}$$

Значит,

$$b_2 = 0,\ b_1 = a_2. \qquad (2.10)$$

Условия (2.8) и (2.10) характеризуют проективные сферы.

Определение 2.2. Поверхностью S_1^0 называется проективная поверхность вращения, ось которой пересекает вторую директрису Вильчинского и не содержит точку A_3 ее первой директрисы.

Теорема 2.3. *Поверхности* S_1^0 *существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.*

Доказательство. Полагая, что в формулах (2.1) и (2.3) $n_0 = 0$, приводим замкнутую систему дифференциальных уравнений поверхности S_1^0 к виду

$$2\omega_0^0 = p_k\omega^k,\ 6\omega_1^1 + p_1\omega^1 - p_2\omega^2 = 0,\ \omega_0^3 = 0,\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,$$

$$\omega_3^i = \omega_j^0,\ \omega_i^3 = \omega^j,\ \omega_1^0 = -\frac{t}{n_1}\omega^1,\ \omega_2^0 = -tn_1\omega_0^2,\ \omega_3^0 = -tn_1\omega_0^1 - \frac{t}{n_1}\omega^2, \qquad (2.11)$$

$$dt = \omega_3^0 + 2t\omega_3^3,\ dn_1 = 2n_1\omega_2^2 + n_1^2\omega^1 - \omega^2 \quad (tn_1 \neq 0),$$

$$dp_k \wedge \omega^k = 0,\ dp_1 \wedge \omega^1 - dp_2 \wedge \omega^2 - 2(4/3p_1p_2 - 6)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \qquad (2.12)$$

Анализируя эту систему, убеждаемся в справедливости теоремы.

Точки $M = A_3 - tA_0$ и $N = A_2 + n_1A_1$ являются фокусами лучей A_0A_3 и A_1A_2 прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2). Они описывают вырождающуюся в прямую MN общую фокальную поверхность. Два других фокуса этих прямолинейных конгруэнций определяются формулами

$$M^* = A_3 + tA_0,\ N^* = A_2 - n_1A_1. \qquad (2.13)$$

Точки прямолинейных конгруэнций задаются одним уравнением:

$$(\omega^1)^2 - n_1^2(\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.14)$$

Приходим к следующему результату:

Теорема 2.4. *Поверхности* S_1^0 *обладают следующим свойствами:*

1) конгруэнция (A_0 A_3) сопряжена поверхности S_1^0, *а конгруэнция* *(A_1 A_2) гармонична ей [2, с. 251];*

2) торсы прямолинейных конгруэнций (A_0 A_3) и (A_1 A_2) соответствуют;

3) фокусы лучей A_0A_3 и A_1A_2 гармонически делят соответственно точки A_0,A_3 и A_1,A_2.

§3. Конгруэнции коник, порожденные проективной сферой

Проективная сфера S_0 определяет конгруэнцию C_a коник C_a:

$$F = x^1x^2 - x^0x^3 = 0,\ x^0 - ax^3 = 0, \tag{3.1}$$

образованную пересечением ее квадрик Ли со стационарной плоскостью

$$\alpha = (A_1A_2M^*). \tag{3.2}$$

Все коники C_a этой конгруэнции принадлежат плоскости α.

Характеристические точки коники $C_a \in (C_a)$ вдоль направления

$$\omega^i = \lambda_i\theta \qquad (|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0, \theta \neq 0) \tag{3.3}$$

определяются системой уравнений

$$x^1x^2 - a(x^3)^2 = 0,\ \ x^0 - ax^3 = 0,\ \ \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 = 0\,. \tag{3.4}$$

Следовательно, вдоль асимптотических линий $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ точки A_1 и A_2 являются двукратными характеристическими точками коники C_a. Другие две характеристические точки этой коники вдоль направления (3.3) определяются системой уравнений

$$\lambda_1(\xi^1)^2 + \lambda_2(\xi^2)^2 = 0,\quad \xi_1\xi_2 = a, \tag{3.5}$$

где $\xi^i = \dfrac{x^i}{x^3}$, $x^3 \neq 0$.

Рассмотрим на проективной сфере S_0 семейство линий Γ_a:

$$a^2\omega^2+\omega^1=0. \tag{3.6}$$

Характеристика квадрики Ли Q проективной сферы S_0 в точке A_0 вдоль линии Γ_a распадается на пару невырожденных коник — (Δ_ε)-коник:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0,\ x^2 - \varepsilon a x^1 = 0,\ (\varepsilon = \pm 1). \qquad (3.7)$$

Из системы уравнений (3.7) следует, что плоскости коник Δ_{-1} и Δ_1 пересекаются по первой директрисе Вильчинского A_0A_3.

Фокальные точки и фокальные семейства конгруэнций Δ_ε-коник определяются системой уравнений (3.7) и уравнений

$$\begin{cases}(x^1)^2\omega^1 + (x^2)^2\omega^2 = 0,\\ (\varepsilon a x^0 + (\frac{2}{3}\varepsilon a p_1 - 1)x^1 + \varepsilon a^2 x^3)\omega^1 + ((\frac{4}{3}\varepsilon a p_2 + a^2)x^1 - x^0 - a x^3)\omega^2 = 0.\end{cases} \qquad (3.8)$$

Исключая из уравнений (3.8) ω^1 и ω^2, получим

$$\begin{aligned}&(x^1)^2((\frac{4}{3}\varepsilon a p_2 + a^2)x^1 - x^0 - a x^3) -\\ &-(x^2)^2(\varepsilon a x^0 + (\frac{2}{3}\varepsilon a p_1 - 1)x^1 + \varepsilon a^2 x^3) = 0\end{aligned}. \qquad (3.9)$$

Анализируя системы уравнений (3.7) и (3.9), приходим к следующему результату:

Теорема 3.1. *Проективные сферы S и* $\widetilde{S}$ *являются сдвоенными фокальными поверхностями конгруэнций (*Δ_{-1}*) и (*Δ_1*).*

Другие две фокальные поверхности этих конгруэнций определяются системой уравнений

$$\eta^2 = \varepsilon a \eta^1,\ \eta^3 = \varepsilon a(\eta^1)^2,\ A(\eta^1)^2 + B\eta^1 + C = 0, \qquad (3.10)$$

где

$$A = a^2(\varepsilon + a^2),\ B = \varepsilon a(\frac{1}{3}\varepsilon a^2 p_1 - \frac{4}{3}p_2) - 2a^2,\quad C = \varepsilon a^3 + 1. \qquad (3.11)$$

Так как проективная сфера имеет постоянный радиус только при a = 1/2 (теорема 1.2), то точки A_0 и A_3 не могут иметь фокальную кратность выше второй.

§4. Комплексы пар коник, порожденные проективной сферой

Рассмотрим на проективной сфере S_0 пучок однопараметрических семейств линий

$$u^2\omega^2 + \omega^1 = 0, \qquad (4.1)$$

где u — произвольный параметр.

Характеристика квадрик Ли проективной сферы S_0 вдоль каждой линии пучка (4.1) распадается на пару невырожденных коник

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0,\ x^2 - \varepsilon u x^1 = 0,\ (\varepsilon = \pm 1)\,. \qquad (4.2)$$

Следовательно, проективная сфера S_0 порождает комплекс К пар невырожденных коник, расслаивающийся на двухпараметрическое семейство одномерных многообразий пар коник, инцидентных одной квадрике. Комплекс К включает в себя комплексы (K_{-1}) и (K_1), образованные кониками (4.2) при $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 1$ соответственно.

Конгруэнции (Δ_{-1}) и (Δ_1), рассмотренные в §3, выделяются из комплексов K_{-1} и K_1, условием —

$$u = a. \qquad (4.3)$$

Так как изменение параметра u при фиксированных двух других независимых параметрах комплекса K_ε (т. е. при фиксированной точке $A_0 \in S_0$) сохраняет значение инварианта a, то все образы, ассоциированные с конгруэнцией (Δ_ε), остаются инвариантными и в комплексе K_ε. Например, стационарная плоскость $\alpha = (A_1A_2M^*)$, определяемая уравнением $x^0 - ax^3 = 0$, — центр M проективной сферы и точка $M^* = A^3 + aA^0$.

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве: Учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986.

2. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций / ГИТТЛ. М.; Л., 1950.

V. Malakhovsky

CONGRUENCES AND COMPLEXES
OF CONICS GENERATED BY PROJECTIVE SPHERE

In 3-dimensional projective space P_3 a non-ruled surface S_o whose all first directrixes of Wilczynski contain a fixed point (projective sphere) and a surface S_1 whose all these directrixes intersect a fixed straight line (projective surface of rotation) are considered. Congruences and complexes of non-degenerating conics generated by surface S_0 are analyzed.

УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

**ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ
В ОБОБЩЕННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ
ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ**

Рассматриваются числовые подмножества $\left(a_n^{(k)}\right)$, определяемые рекуррентной формулой

$$a_{n+1}^{(k)} = a_n^{(k)} + d \cdot n^k, \tag{0.1}$$

где $a_1^{(k)} = p$ — нечетное простое число; d — четное положительное число $\left(p < 10^4,\, d \le 200\right)$. Показано, что при четном $k \le 20$ число d кратно 6. Дана компьютерная программа, составленная Н.В. Малаховским, определяющая для $k \le 20$, $p < 10^4$, $d \le 200$ все подмножества $\left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}\right\}$ простых чисел для $m \ge 1$.