УДК 514.75

О. О. Белова

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

НОРМАЛЬНАЯ ОБОБЩЕННАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ПРОСТРАНСТВОМ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В проективном пространстве рассмотрено пространство П центрированных плоскостей. В обобщенном расслоении задана нормальная аффинная связность, ассоциированная с пространством П. Поле объекта этой аффинной связности определяет объекты кручения и кривизны, которые являются тензорами, содержащими по три простейших и по два простых подтензора. Рассмотрен канонический случай нормальной обобщенной аффинной связности.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, нормальная обобщенная аффинная связность, тензоры кручения и кривизны.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим пространство Π [1] всех центрированных плоскостей размерности m. Формы $\omega^a, \omega^\alpha, \omega_a^\alpha$ являются базисными формами пространства Π.

Гладкое многообразие со структурными уравнениями

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^a, \; D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^a \wedge \omega_a^\alpha,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b) - \omega^\alpha \wedge \omega_a,$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha - \omega^\gamma \wedge (\delta_\gamma^\alpha \omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma) - \delta_\beta^\alpha \omega^a \wedge \omega_a - \omega_a^\alpha \wedge \omega_\beta^a$$

называется обобщенным расслоением [2] нормальных аффинных реперов и обозначается $A_{h^2+[h]}(\Pi)$, где $h=n-m$.

Для задания аффинной связности в обобщенном расслоении $A_{h^2+[h]}(\Pi)$ распространим на него прием Лумисте задания групповых связностей в главных расслоениях. Преобразуем базисно-слоевые формы ω^α и слоевые формы ω^α_β расслоения $A_{h^2+[h]}(\Pi)$ с помощью линейных комбинаций базисных форм $\omega^a, \omega^\alpha, \omega^\alpha_a$

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}^\alpha &= \omega^\alpha - L^\alpha_a \omega^a - L^\alpha_\beta \omega^\beta - L^{\alpha a}_\beta \omega^\beta_a, \\ \widetilde{\omega}^\alpha_\beta &= \omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta a}\omega^a - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a. \end{aligned} \tag{1}$$

Возьмем внешние дифференциалы форм (1) с помощью структурных уравнений [1]

$$\begin{aligned} D\widetilde{\omega}^\alpha &= \widetilde{\omega}^\beta \wedge \widetilde{\omega}^\alpha_\beta + \omega^a \wedge \Delta L^\alpha_a + \omega^\beta \wedge (\Delta L^\alpha_\beta + L^{\alpha a}_\beta \omega_a - L^\alpha_a \omega^a_\beta) + \\ &+ \omega^\beta_a \wedge \Delta L^{\alpha a}_\beta - L^\beta_a \Gamma^\alpha_{\beta b}\omega^a \wedge \omega^b + \\ &+ (-\Gamma^{\alpha b}_{\gamma\beta} L^\gamma_a + L^{\gamma b}_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma a} + \delta^b_a \delta^\alpha_\beta - \delta^b_a L^\alpha_\beta)\omega^a \wedge \omega^\beta_b + \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\beta a} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} L^\gamma_a - L^\gamma_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma a})\omega^\beta \wedge \omega^a + (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - L^\mu_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\gamma})\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\ &+ (\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha a}_{\mu\gamma} L^\mu_\beta + L^{\mu a}_\gamma \Gamma^\alpha_{\mu\beta})\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma} L^{\beta a}_\mu \omega^\gamma_b \wedge \omega^\mu_a, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D\widetilde{\omega}^\alpha_\beta &= \widetilde{\omega}^\gamma_\beta \wedge \widetilde{\omega}^\alpha_\gamma + \omega^a \wedge (\Delta\Gamma^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta \omega_a) + \\ &+ \omega^\gamma \wedge (\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta a}\omega^a_\gamma + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta \omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma \omega_\beta) + \\ &+ \omega^\gamma_a \wedge (\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma \omega^a_\beta) + \Gamma^\alpha_{\gamma a}\Gamma^\gamma_{\beta b}\omega^a \wedge \omega^b + \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\mu a}\Gamma^{\mu b}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\beta a} - \delta^b_a \Gamma^\alpha_{\beta\gamma})\omega^a \wedge \omega^\gamma_b + \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\beta a} - \Gamma^\alpha_{\mu a}\Gamma^\mu_{\beta\gamma})\omega^\gamma \wedge \omega^a + \Gamma^\eta_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\eta\gamma}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta a}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha a}_{\eta\mu}\Gamma^\eta_{\beta\gamma})\omega^\gamma \wedge \omega^\mu_a + \Gamma^{\alpha a}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta b}_{\beta\mu}\omega^\gamma_a \wedge \omega^\mu_b. \end{aligned}$$

Применяя теорему Картана — Лаптева в обобщенном случае, получим

$$\Delta L^{\alpha}_{a} = L^{\alpha}_{ab}\omega^{b} + L^{\alpha}_{a\beta}\omega^{\beta} + M^{\alpha b}_{a\beta}\omega^{\beta}_{b} ,$$

$$\Delta L^{\alpha}_{\beta} + L^{\alpha a}_{\beta}\omega_{a} - L^{\alpha}_{a}\omega^{a}_{\beta} = L^{\alpha}_{\beta a}\omega^{a} + L^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} + M^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a} ,$$

$$\Delta L^{\alpha a}_{\beta} = M^{\alpha a}_{\beta b}\omega^{b} + N^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} + L^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{b} , \quad (3)$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta a} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b} + \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{b} ,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega^{a}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_{a} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma a}\omega^{a} + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{a} ,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} = G^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma b}\omega^{b} + \Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{b} .$$

Утверждение 1. *Объект обобщенной аффинной связности* $\Gamma = \{ L^{\alpha}_{a}, L^{\alpha}_{\beta}, L^{\alpha a}_{\beta}, \Gamma^{\alpha}_{\beta a}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} \}$, *ассоциированной с пространством центрированных плоскостей, содержит два простейших подтензора* L^{α}_{a}, $L^{\alpha a}_{\beta}$ *простого тензора связности* $L = \{ L^{\alpha}_{a}, L^{\alpha}_{\beta}, L^{\alpha a}_{\beta} \}$ *и два простейших подквазитензора* $\Gamma^{\alpha}_{\beta a}$, $\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$ *простого квазитензора нормальной линейной связности* $\{ \Gamma^{\alpha}_{\beta a}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} \}$.

Подставим дифференциальные уравнения (3) в структурные уравнения (2):

$$D\widetilde{\omega}^{\alpha} = \widetilde{\omega}^{\beta} \wedge \widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} + S^{\alpha}_{ab}\omega^{a} \wedge \omega^{b} + S^{\alpha}_{\beta a}\omega^{\beta} \wedge \omega^{a} + S^{\alpha b}_{a\beta}\omega^{a} \wedge \omega^{\beta}_{b} + \\ + S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{a} + S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}_{a} \wedge \omega^{\gamma}_{b} , \quad (4)$$

$$D\widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \widetilde{\omega}^{\gamma}_{\beta} \wedge \widetilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{a} \wedge \omega^{b} + R^{\alpha}_{\beta\gamma a}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{a} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{a} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + \\ + R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu}_{a} + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{a} \wedge \omega^{\mu}_{b} ,$$

где компоненты объекта кручения

$$S = \{ S^{\alpha}_{ab}, S^{\alpha}_{\beta a}, S^{\alpha b}_{a\beta}, S^{\alpha}_{\beta\gamma}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} \}$$

нормальной аффинной связности выражаются по формулам

$$S^{\alpha}_{ab} = L^{\alpha}_{[ab]} - L^{\beta}_{[a}\Gamma^{\alpha}_{\beta b]} , \quad S^{\alpha}_{\beta a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta a} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}L^{\gamma}_{a} - L^{\gamma}_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma a} - L^{\alpha}_{a\beta} + L^{\alpha}_{\beta a} ,$$

$$S^{\alpha b}_{a\beta} = M^{\alpha b}_{a\beta} - M^{\alpha b}_{\beta a} - \Gamma^{\alpha b}_{\gamma\beta}L^{\gamma}_{a} + L^{\gamma b}_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma a} + \delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\beta} - \delta^{b}_{a}L^{\alpha}_{\beta} , \quad (5)$$

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{[\beta\gamma]} + \Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]} - L^{\mu}_{[\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]} , \quad S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = M^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - L^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\alpha a}_{\mu\gamma} + L^{\mu a}_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - N^{\alpha a}_{\gamma\beta} ,$$

$$S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = L^{\alpha\,[ab]}_{\;\;[\beta\gamma]} + \Gamma^{\alpha}_{\mu}{}^{[a}_{[\beta} L^{\mu b]}_{\gamma]} ,$$

а компоненты объекта кривизны

$$R = \{\, R^{\alpha}_{\beta ab},\ R^{\alpha}_{\beta\gamma a},\ R^{\alpha b}_{\beta a\gamma},\ R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} \,\}$$

имеют вид

$$R^{\alpha}_{\beta ab} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[ab]} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma[a}\Gamma^{\gamma}_{\beta b]},\ R^{\alpha}_{\beta\gamma a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma a} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu a}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta a},$$

$$R^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - \Pi^{\alpha b}_{\beta\gamma a} + \Gamma^{\alpha}_{\mu a}\Gamma^{\mu b}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta a} - \delta^{b}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha}_{\eta[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta}\left[\begin{smallmatrix} ab \\ \gamma\mu \end{smallmatrix}\right] + \Gamma^{\alpha}_{\eta}\left[\begin{smallmatrix} a \\ \gamma \end{smallmatrix}\Gamma^{\eta b}_{\beta\mu}\right], \qquad (6)$$

$$R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} = \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - G^{\alpha a}_{\beta\mu\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta a}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha a}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}.$$

Утверждение 2. *В структурные уравнения (4) форм связности (1) входят компоненты объектов кручения и кривизны, которые выражаются по формулам (5, 6).*

Продолжая уравнения (3) компонент объекта связности Γ, получим:

$$\Delta L^{\alpha}_{ab} + L^{\alpha}_{b}\omega_{a} \equiv 0,\ \Delta L^{\alpha}_{a\beta} - L^{\alpha}_{ab}\omega^{b}_{\beta} + M^{\alpha b}_{a\beta}\omega_{b} - \delta^{\alpha}_{\beta}L^{\gamma}_{a}\omega_{\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta M^{\alpha b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}L^{\alpha}_{c}\omega^{c}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}L^{\gamma}_{a}\omega^{b}_{\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta L^{\alpha}_{\beta a} - L^{\alpha}_{ba}\omega^{b}_{\beta} + M^{\alpha b}_{\beta a}\omega_{b} + L^{\alpha}_{a}\omega_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta L^{\alpha}_{\beta\gamma} + M^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_{a} + N^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_{a} + L^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}L^{\mu}_{\beta}\omega_{\mu} - L^{\alpha}_{\beta a}\omega^{a}_{\gamma} - L^{\alpha}_{a\gamma}\omega^{a}_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta M^{\alpha a}_{\beta\gamma} - M^{\alpha a}_{b\gamma}\omega^{b}_{\beta} + L^{\alpha ba}_{\beta\gamma}\omega_{b} + L^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}L^{\mu}_{\beta}\omega^{a}_{\mu} + L^{\alpha a}_{\beta}\omega_{\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta M^{\alpha a}_{\beta b} + L^{\alpha a}_{\beta}\omega_{b} - \delta^{a}_{b}L^{\alpha c}_{\beta}\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta N^{\alpha a}_{\beta\gamma} - M^{\alpha a}_{\beta b}\omega^{b}_{\gamma} + L^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega_{b} - \delta^{\alpha}_{\gamma}L^{\mu a}_{\beta}\omega_{\mu} - L^{\alpha a}_{\beta}\omega_{\gamma} + L^{\alpha a}_{\gamma}\omega_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta L^{\alpha ab}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}L^{\mu a}_{\beta}\omega^{b}_{\mu} + L^{\alpha b}_{\beta}\omega^{a}_{\gamma} + L^{\alpha a}_{\gamma}\omega^{b}_{\beta} \equiv 0, \qquad (7)$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta a\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b}_{\gamma} + \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega_{b} + \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega_{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma a}\omega_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta a}\omega_{\mu} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta ab} + \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega_{b} + \Gamma^{\alpha}_{\beta b}\omega_{a} \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - \delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma} - \delta^{b}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\beta c}\omega^{c}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma a}\omega^{b}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta a}\omega^{b}_{\mu} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma a}\omega^{a}_{\mu} + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega_{a} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a\mu}\omega^{a}_{\gamma} + G^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega_{a} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\omega_{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\omega_{\beta} +$$

$$+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega_{\mu} - \delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}\omega_{\eta} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma a} - \Gamma^{\alpha}_{\beta b a}\omega^{b}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega_{\gamma} + \Pi^{\alpha b}_{\beta\gamma a}\omega_{b} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega_{a} \equiv 0 ,$$

$$\Delta\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - \Pi^{\alpha a}_{\beta b\mu}\omega^{b}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu}\omega_{b} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\omega^{a}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\omega^{a}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}\omega^{a}_{\eta} \equiv 0 ,$$

$$\Delta G^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma b}\omega^{b}_{\mu} + \Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega_{b} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\mu}\omega_{\gamma} + \Gamma^{\alpha a}_{\mu\gamma}\omega_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\eta a}_{\beta\gamma}\omega_{\eta} \equiv 0 ,$$

$$\Delta\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma b} + \delta^{a}_{b}\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta} - \delta^{a}_{b}\Gamma^{\alpha c}_{\beta\gamma}\omega_{c} \equiv 0 ,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega^{a}_{\mu} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\mu}\omega^{b}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha a}_{\mu\gamma}\omega^{b}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\eta a}_{\beta\gamma}\omega^{b}_{\eta} \equiv 0 .$$

Пользуясь формулами (5) и (6) выражений компонент объектов кручения и кривизны, находим дифференциальные сравнения, которым удовлетворяют компоненты этих объектов:

$$\Delta S^{\alpha}_{ab} \equiv 0 ,\ \Delta S^{\alpha}_{\beta a} + 2S^{\alpha}_{ab}\omega^{b}_{\beta} - S^{\alpha b}_{a\beta}\omega_{b} \equiv 0 ,\ \Delta S^{\alpha b}_{a\beta} \equiv 0 ,$$

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} - S^{\alpha}_{[\beta a}\omega^{a}_{\gamma]} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_{a} \equiv 0 ,\ \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - 2S^{\alpha ab}_{\gamma\beta}\omega_{b} - S^{\alpha a}_{b\gamma}\omega^{b}_{\beta} \equiv 0 ,\ \Delta S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} \equiv 0 ;$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta ab} \equiv 0 ,\ \Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma a} + 2R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b}_{\gamma} - R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega_{b} \equiv 0 ,\ \Delta R^{\alpha b}_{\beta a\gamma} \equiv 0 ,\ \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} \equiv 0 ,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} - R^{\alpha}_{\beta[\gamma a}\omega^{a}_{\mu]} + R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_{a} \equiv 0 ,\ \Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - 2R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}\omega_{b} - R^{\alpha a}_{\beta b\mu}\omega^{b}_{\gamma} \equiv 0 .$$

Теорема 1. *В пространстве Π центрированных плоскостей объекты кручения S и кривизны R нормальной обобщенной аффинной связности являются тензорами, содержащими простейшие S^{α}_{ab}, $S^{\alpha b}_{a\beta}$, $S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}$, $R^{\alpha}_{\beta ab}$, $R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}$, $R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}$ и простые $\{S^{\alpha}_{\beta a}, S^{\alpha}_{ab}, S^{\alpha b}_{a\beta}\}$, $\{S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\gamma\beta}, S^{\alpha a}_{b\gamma}\}$, $\{R^{\alpha}_{\beta\gamma a}, R^{\alpha}_{\beta ab}, R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\}$, $\{R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}, R^{\alpha a}_{\beta b\mu}\}$ подтензоры.*

Утверждение 3. *Дифференциальные сравнения для подтензоров кручения S и кривизны R соответствуют друг другу.*

Рассмотрим канонический случай нормальной аффинной связности, когда тензор связности L обращается в нуль. В этом случае $\widetilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha}$, то есть преобразование базисно-слоевых форм ω^{α} не производится, а объект связности упрощается:

$$\overset{0}{\Gamma} = \{0, 0, 0, \Gamma^{\alpha}_{\beta a}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\} .$$

Учтем равенства $L_a^{\alpha}=0$, $L_{\beta}^{\alpha}=0$, $L_{\beta}^{\alpha a}=0$ в выражениях (5) компонент тензора кручения, тогда

$$S_{ab}^{\alpha}=0\,,\; S_{\beta a}^{\alpha}=\Gamma_{\beta a}^{\alpha}\,,\; S_{a\beta}^{\alpha b}=\delta_a^b\delta_{\beta}^{\alpha}\,,\; S_{\beta\gamma}^{\alpha}=\Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha}\,,\; S_{\beta\gamma}^{\alpha a}=\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\,,\; S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}=0\,.$$

Теорема 2. *В каноническом случае тензор кручения нормальной аффинной связности содержит нулевые компоненты* S_{ab}^{α}, $S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}$, *компоненты* $S_{\beta a}^{\alpha}$, $S_{\beta\gamma}^{\alpha a}$ *совпадают с соответствующими компонентами объекта связности, компоненты* $S_{\beta\gamma}^{\alpha}$ *суть альтернации аналогичных компонент объекта связности, а компоненты* $S_{a\beta}^{\alpha b}$ *равны произведению символов Кронекера.*

Следствие. *Каноническая нормальная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с пространством центрированных плоскостей, всегда с кручением.*

Список литературы

1. *Belova O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // Journal of Mathematical Sciences, 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.

2. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

O. Belova

NORNAL GENERALIZED AFFINE CONNECTION
ASSOCIATED WITH THE SPACE OF CENTERED PLANES

In projective space the space Π of centered planes is considered. The normal affine connection, associated with the space Π, is set in generalized fibering. Field of this affine connection object defines torsion and curvature objects. These objects are tensors, each of which contains three elementary and two simple subtensors. The canonical case of normal generalized affine connection is considered.