мени, нужно еще определить величины (a_{ij}) и (c_{ij}) как функции времени. Напоминаем, что мы рассматриваем случай, когда движущееся тело имеет три плоскости симметрии, т.е. $b_{ij}=0$. Согласно общей теории динамики твердого тела матрица (a_{ij}) задает оператор инерции, элементы которого определяются по формулам:

$$a_{11}=m\cdot(y^2(t)+z^2(t)),\quad a_{22}=m\cdot(x^2(t)+z^2(t)),\quad a_{33}=m\cdot(x^2(t)+y^2(t)),$$

$$a_{12}=-m\cdot x(t)\cdot y(t),\quad a_{13}=-m\cdot x(t)\cdot z(t),\quad a_{23}=-m\cdot y(t)\cdot z(t),$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – координаты центра масс тела, а m – масса тела. Что касается матрицы (c_{ij}), то ее представление как функции времени будет дано в дальнейшем.

Библиографический список

1. Новиков С.П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника – Шнирельмана – Морса (ЛШМ).I // Функц. анализ и его приложения. 1981. Т.15. Вып.3. С.54–66.

2. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. Изд-во Моск. ун-та, 1988. 413 с.

3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 756 с.

4. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. Изд-во Моск. ун-та, 1974. 645 с.

УДК 514.75

К ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б.А.Андреев

(Калининградский государственный университет)

Теория распределений гиперплоскостных элементов [1],[2] в проективном и аффинном пространствах является развитой ветвью дифференциальной геометрии. В настоящей работе показано, что задание этого распределения в пространстве A_m эквивалентно заданию отображения проективных пространств, что приводит к появлению структур теории точечных отображений [3],[4] в геометрии указанного распределения. Это позволило получить и охарактеризовать новые геометрические образы, присоединенные к распределению, и в некоторых случаях дать новые интерпретации известным. Доказан ряд предложений, связывающих, с одной стороны, проективитет Бомпиани-Пантази, инвариантные нормали и некоторые фокальные образы распределения с касательными отображениями, в том числе с локальной коллинеацией Чеха, $K(P_\alpha)$ – главными прямыми и главными точками отображения – с другой. Символ (2.N) [2] указывает на формулу (2.N) статьи [2].

Рассмотрим m-мерное проективное пространство P_m, в котором зафиксирована гиперплоскость P_{m-1}. Отнесем пространство P_m к подвижному реперу $\tilde R=\{R_0,R_\alpha\}$ $(\alpha,\ldots=\overline{1,m})$; деривационные формулы репера $\tilde R$ имеют вид

$$d\tilde R_I=\tilde\omega_I^J\,\tilde R_J\quad(I,\ldots=\overline{0,m}).\qquad(1)$$

Формы Пфаффа $\tilde\omega_I^J$ подчиняются уравнениям структуры проективного пространства

$$D\tilde\omega_I^J=\tilde\omega_I^K\wedge\tilde\omega_K^J.\qquad(2)$$

Поместив в гиперплоскость P_{m-1} вершины R_α, имеем:

$$\tilde\omega_\alpha^0\equiv 0.\qquad(3)$$

Будем рассматривать P_m как расширенное аффинное пространство $\tilde A_m$ с несобственной гиперплоскостью P_{m-1}; при этом в силу (2) формы Пфаффа

$$\omega^\alpha=\tilde\omega_0^\alpha,\quad \omega_\alpha^\beta=\tilde\omega_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\,\tilde\omega_0^0\qquad(4)$$

подчиняются уравнениям структуры m-мерного аффинного пространства $A_m=\tilde A_m\setminus P_{m-1}$ и совпадают с компонентами инфинитезимальных перемещений репера $R=\{M,\vec e_\alpha\}$, где $M=R_0$, а единичная точка репера $\tilde R$ совпадает с концом вектора $\sum_{\alpha=1}^{m}\vec e_\alpha$. Полагая $n+1=m$, мы приходим к рассмотренному в [2] пространству A_{n+1} с подвижным репером R. С другой стороны, расширяя A_m до $\tilde A_m$, мы однозначно получаем P_m с фиксированной гиперплоскостью $P_n\subset P_m$. Заметим, что из (2) и (3) вытекает

$$D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta.\qquad(5)$$

Это означает, что точки R_α образуют подвижный репер n-мерного проективного пространства P_n.

В репере нулевого порядка распределение $\mathfrak{A}$ гиперплоскостных элементов (M,Γ) задается системой (1.4) [2]:

$$\omega_i^m=L_{i\alpha}\,\omega^\alpha\quad(i=\overline{1,n}).\qquad(6)$$

Пусть Λ – подпространство в A_m (или P_m), а $\tilde\Lambda$ – его замыкание в P_m. Определим на множестве указанных подпространств отображение σ формулой $\sigma: \Lambda \longmapsto \widetilde{\Lambda} \cap P_n$, т.е. $\sigma(\Lambda)$ состоит из несобственных точек этого подпространства. Имеем: $\dim \sigma(\Lambda) = \dim \Lambda - 1$. Пусть для точки $M \in A_m$ и гиперплоскости $\Gamma \subset A_m$ выполняется: $(M,\Gamma) \in \mathfrak{A}$. Это означает [2, с.170], что каждой точке M пространства поставлена в соответствие гиперплоскость $\Gamma \ni M$. Таким образом возникает определенное на A_m отображение $a: M \mapsto \Gamma$, которое задает распределение $\mathfrak{A}$. Рассмотрим отображение $f = \sigma \circ a$. Имеем:

$$f: M \in A_m \longmapsto f(M) \in P_n^*, \qquad (7)$$

где P_n^* – проективное пространство, двойственное к P_n. Пространство P_n^* изоморфно точечному пространству P_n, и, таким образом, отображение f является объектом изучения теории точечных отображений [3], [4], структуры которой оказываются связанными с геометрией распределения $\mathfrak{A}$. Отвлекаясь от конкретной реализации проективного пространства P_n^*, мы будем называть отображение f точечным отображением. С другой стороны, натянутая на $f(M)$ и M гиперплоскость $\widetilde{\Gamma}$ однозначно определяет гиперплоскость $\Gamma = \widetilde{\Gamma} \setminus f(M)$, такую, что $(M,\Gamma) \in \mathfrak{A}$. Из проведенных рассуждений вытекает

П р е д л о ж е н и е 1. Задание распределения $\mathfrak{A}$ гиперплоскостных элементов в A_m равносильно заданию точечного отображения $f: A_m \longrightarrow P_n^*$.

Если R является репером нулевого порядка распределения, то формы Пфаффа ω_i^m являются структурными формами пространства P_n^*. Система дифференциальных уравнений отображения f имеет вид (6), т.е. совпадает с дифференциальными уравнениями распределения $\mathfrak{A}$.

В [2, с.176] построено поле нормалей I рода распределения: каждому элементу (M,Γ) распределения поставлена в соответствие прямая L, не лежащая в Γ, тем самым каждому элементу $\sigma(\Gamma)$ поставлена в соответствие точка $\sigma(L)$, что задает нормализацию проективного пространства P_n^*. Дробно-линейные отображения

$K(P_\alpha): P_m \to P_n^*$

$$\xi_i = \frac{L_{i\alpha} x^\alpha}{1 - P_\beta x^\beta}, \qquad (8)$$

касательные к отображению f в точке M, мы будем, как и в теории точечных отображений, называть коллинеациями, отвлекаясь

от конкретной реализации пространства P_n^*. Проведем частичную канонизацию репера, положив $R_m = \sigma(L)$. В связке $K(P_\alpha)$ имеется отображение K°, линейное на A_m, выделяемое условием $P_\alpha = 0$:

$$\xi_i = L_{i\alpha} x^\alpha. \qquad (9)$$

Пусть V_m и V_n – линейные пространства векторов из A_m и $A_n = P_n^* \setminus \sigma(L)$ с началами соответственно в M и $f(M)$. Уравнения (9) задают линейное отображение $V_m \to V_n$, ядро которого, как вытекает из (2.21) - (2.23) [2], составляют векторы вида $\overline{MP}$, где $P \in L$. Таким образом, нормаль L определяет ядро отображения (9) в соответствующей точке.

В силу проведенной канонизации $R_m = \sigma(L)$ из (2.20), (2.18) [2] получаем:

$$L^i = 0, \quad L_{im} = 0, \qquad (10)$$

а из (1.6), (2.19) [2] вытекает

$$\omega_m^i = L_\beta^i \omega^\beta, \quad L_\beta^i = -L^{it} L_{tm\beta}. \qquad (11)$$

Определенный формулой (2.58) [2] проективитет Бомпиани-Пантази S ставит в соответствие нормали I рода $\nu: x^i = \nu^i x^m$ нормаль II рода $\pi: x^m = 0, \pi_i x^i - 1 = 0$, для которой выполняется

$$\pi_i = -L_{ik} \nu^k. \qquad (12)$$

Рассмотрим сужение $f|_\Gamma: \Gamma \to P_n^*$ отображения f на гиперплоскость $\Gamma: x^m = 0$. Из (9) получаем уравнения касательного к $f|_\Gamma$ в точке M отображения $\varkappa = K^\circ|_{\widetilde{\Gamma}}, \varkappa: \widetilde{\Gamma} \to P_n^*$ в виде

$$\xi_i = L_{ij} x^j. \qquad (13)$$

Пусть j – инволюция пространства $\widetilde{\Gamma}^*$, двойственного к $\widetilde{\Gamma}$, порожденная отражением аффинной гиперплоскости Γ от точки $M: P(x^i) \in \Gamma \longmapsto P'(-x^i) \in \Gamma$.

П р е д л о ж е н и е 2. Для голономного распределения $\mathfrak{A}$ проективитет Бомпиани-Пантази $s: \nu \longmapsto \pi$ порожден отображением $\varkappa$, а именно: $s = j \circ \varkappa^* \circ \sigma$, где $\varkappa^*: P_n \to \widetilde{\Gamma}^*$ – отображение, двойственное к $\varkappa$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения отображения $\varkappa^*$ имеют вид

$$\pi_j = L_{ij} y^i, \qquad (14)$$

причем $\bar{P} = y^i \bar{R}_i + \bar{R}_m \in P_n$, а отображение $\bar{P} = \sigma(\nu)$ задается формулами $y^i = \nu^i$. Справедливость доказываемого утверждения теперь вытекает из (12) и (14).

Из (8) получаем уравнения связки $K(P_i): \widetilde{\Gamma} \to P_n^*$ касательных

3 Зак. 1606

к $f|_\Gamma$ в M коллинеаций:

$$\xi_i = \frac{L_{ij} x^j}{1 - P_k x^k}. \qquad (15)$$

С помощью принадлежащей связке $K(P_i)$ локальной коллинеации Чеха [5] можно получить геометрическую характеристику найденной в [2, с.179] инвариантной нормали I рода $\mathcal{B}$

$$x^i = B^i x^m \qquad \left(B^i = -\frac{1}{n+2} L^{ti} B_t = -\frac{1}{n+2} L^{ti} L^{sp} L_{pst}\right). \qquad (16)$$

Наряду с нормалью $\mathcal{B}$ рассмотрим нормаль B :

$$x^i = \frac{n+2}{n+1} B^i x^m.$$

Точки $\sigma(\mathcal{B})$ и $\sigma(B)$ определяют в аффинном пространстве $A_n = P_n \setminus \sigma(\Gamma)$ векторы $\bar{\mathcal{B}}$ и $\bar{B}$ с началом в $\sigma(L)$ и концами $\sigma(\mathcal{B})$ и $\sigma(B)$. Имеем равенство: $\bar{B} = (1 + \frac{1}{n+1})\bar{\mathcal{B}}$, откуда вытекает, что векторы $\bar{\mathcal{B}}$ и $\bar{B}$ (значит, и нормали $\mathcal{B}$ и B) очевидным образом определяют друг друга.

Локальная коллинеация Чеха K_c выделяется из связки $K(P_i)$ условием $P_i = \frac{1}{n+1} B_i$ и характеризуется тем, что якобиан отображения $K_c^{-1} \cdot f|_\Gamma$ имеет точку M своей стационарной точкой. Назовем нормалью Чеха нормаль II рода

$$\frac{1}{n+1} B_i x^i = 1, \quad x^m = 0, \qquad (17)$$

которая имеет следующий геометрический смысл.

П р е д л о ж е н и е 3. Образы точек нормали (17) при локальной коллинеации Чеха инцидентны точке $\sigma(L)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть координаты x^α точки P удовлетворяют (17). Тогда из (15) получаем: $R_m \in K_c(P)$.

П р е д л о ж е н и е 4. Нормали I рода B отображение $j \circ \varkappa^* \circ \sigma$ ставит в соответствие нормаль Чеха.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (14), для $\varkappa^* \circ \sigma$ имеем:

$$\pi_i = L_{ki} B^k = L_{ki} \left(-\frac{1}{m+1} L^{tk} B_t\right) = -\frac{1}{m+1} B_i,$$

откуда для $j \circ \varkappa^* \circ \sigma$ получаем (17).

Из предложений 2 и 4 вытекает

П р е д л о ж е н и е 5. Для голономного распределения $\mathfrak{A}$ нормаль B и нормаль Чеха соответствуют друг другу в проективитете Бомпиани-Пантази.

Фундаментальный объект 2-го порядка распределения определяет для каждой точки M инвариантное алгебраическое многообразие $\mathfrak{J}$:

$$\Phi_i \equiv L_{i\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 2 L_{ij} x^j = 0, \qquad (18)$$

являющееся индикатрисой [6] отображения f . Индикатриса $\mathfrak{J}$ содержит точку M , в общем случае имеет порядок 2^n и размерность I; нормаль L является касательным в точке M подпространством к многообразию $\mathfrak{J}$. Каждая точка $A \in \mathfrak{J} \setminus (\mathfrak{J} \cap L)$ является главной точкой отображения f относительно M . Это означает, что прямая $[MA]$ является $K(P_\alpha)$ - главной [3], и образ точки A при любой коллинеации, для которой прямая $[MA]$ является главной, инцидентен точке $\sigma(L)$. Индикатриса $\mathfrak{J}$ определяет конус χ характеристических прямых отображения f : это прямые связки $\{M\}$, имеющие две общие точки с многообразием $\mathfrak{J}$. Если γ - кривая, касательная к характеристической прямой в точке M , то $f(\gamma) \subset P_n^*$ и $K(P_\alpha)(\gamma) \subset P_n^*$ имеют в $f(M)$ геометрическое касание 2-го порядка [3, с.69]. В общем случае имеется однопараметрическое семейство характеристических прямых отображения f . Легко показать, что многообразие $\mathfrak{J}_\Gamma = \mathfrak{J} \cap \Gamma$ является индикатрисой отображения $f|_\Gamma$ и множество $\chi_\Gamma = \chi \cap \Gamma$ состоит из характеристических прямых отображения $f|_\Gamma$. В общем случае χ_Γ содержит $2^n - 1$ характеристическую прямую.

Пусть $q(\mathfrak{J})$ - определяемое многообразием $\mathfrak{J}$ $(n-1)$-мерное линейное семейство гиперквадрик: $\Lambda^i \Phi_i = 0$.

П р е д л о ж е н и е 6. Многообразие фокальных направлений в гиперплоскости Γ , соответствующих фокальной точке P нормали L , определяется множеством прямых связки $\{M\}$, являющимся пересечением поляр точки P относительно всех гиперквадрик семейства $q(\mathfrak{J})$ и гиперплоскости Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.76) [2] получаем для точек прямых, определяющих требуемые направления:

$$x^m = 0, \quad (\delta^i_j + \rho L^i_j) x^j = 0. \qquad (19)$$

Система, задающая пересечение указанных поляр и гиперплоскости Γ, легко приводится к виду (19).

В [2, с.179] получена нормаль I рода Q , направление которой является фокальным, соответствующим несобственной фокальной точке $\sigma(L)$ нормали L . Рассмотрим $(n-1)$-мерное семейство $C(\mathfrak{J})$ квадратичных элементов $c = q \cap P_n$, где $q \in q(\mathfrak{J})$. Пересечение поляр точки $\sigma(\mathfrak{J})$ относительно всех квадратичных элементов $c \in C(\mathfrak{J})$, рассматриваемых как гиперквадрики пространства P_n, задается в P_n системой

$$L_{ijm}x^j + L_{imm}x^m = 0, \qquad (20)$$

которая, с учетом того, что в нашем репере имеем $A^i_\alpha = L^i_\alpha$, и в силу (2.42) [2] и (11), приводится к виду

$$x^i - Q^i x^m = 0. \qquad (21)$$

Для нормали ν^i, определяемой точкой $P(x^i, x^m) \in P_n$, получаем

$$\nu^i = \frac{x^i}{x^m} = Q^i. \qquad (22)$$

Нами доказано

Предложение 7. Фокальное направление, соответствующее несобственной фокальной точке $\sigma(L)$ нормали L, определяется нормалью I рода Q, для которой точка $\sigma(Q)$ является пересечением поляр точки $\sigma(L)$ относительно всех гиперквадрик пространства P_n, принадлежащих семейству $C(J)$.

Заметим, что в общем случае множество главных точек однозначно определяет многообразие J, а, следовательно, семейства $\varphi(J)$ и $C(J)$. Таким образом, из предложений 6 и 7 вытекает, что рассмотренные в них фокальные свойства распределения $\mathfrak{A}$ полностью определяются множеством главных точек отображения f, основанных на понятии $K(P_\alpha)$ - главных прямых теории точечных отображений.

Библиографический список

1. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

2. Алшибая Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.5. С.169-193.

3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия, 1970. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1971. С.153-174.

5. Чех Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I // Чехосл. матем. ж. 1952. V.2. N 1. P.91-107.

6. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n\ (m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.5-9.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК
С ОДНОМЕРНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

И.С.Басюк

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрена конгруэнция $\mathcal{L}$ невырожденных линейчатых квадрик, фокальное многообразие каждой из которых содержит: 1) линию; 2) точку A, описывающую поверхность; 3) точку B, не принадлежащую прямолинейным образующим, проходящим через точку A. Доказано, что фокальная линия квадрики $Q \in \mathcal{L}$ является коникой; рассмотрены частные подклассы.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{L}$ к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_i - точки пересечения прямолинейных образующих, проходящих через фокальные точки $A_0 \equiv A$ и $A_3 \equiv B$ квадрики $Q \in \mathcal{L}$ (здесь и далее $i,j,k = 1,2,\ i \neq j$, по i, j суммирование не производится). Уравнение квадрики Q приводится к виду $F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0$. Конгруэнция $\mathcal{L}$ описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \omega_3^0 = 0, \quad \omega_0^3 = 0, \quad \omega_j^i = a_{jk}\omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = b_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = c_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^i = m_{jk}\omega^k, \\ \Omega \equiv \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = h_k\omega^k, \end{cases} \qquad (1)$$

причем выполняются соотношения:

$$b_{12} = b_{21}, \quad c_{11}m_{22} - c_{22}m_{11} + c_{21}m_{12} - c_{12}m_{21} = 0,$$

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{21} & c_{11} & c_{21} & h_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_{12} & b_{22} & c_{12} & c_{22} & h_2 \end{matrix} \right\| = 2. \qquad (2)$$

Фокальное многообразие квадрики $Q \in \mathcal{L}$ определяется системой уравнений:

$$F = 0, \quad F_i \equiv -a_{ki}(x^k)^2 + b_{ki}x^0x^k + c_{ki}x^kx^3 + h_i x^1x^2 = 0. \qquad (3)$$