УДК 514.75

Н.В. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

КУБИКА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ПРЯМЫМИ СИМСОНА ТРЕУГОЛЬНИКА

Методом комплексных чисел в планиметрии [3] исследуется кубика, образованная полюсами прямых Симсона невырожденного треугольника относительно мнимой изотомической коники [1]. Прямые, проходящие через две взаимно сопряженные относительно изотомического преобразования плоскости точки кубики, огибают конику, касающуюся кубики в полюсах прямых Симсона, соответствующих изогонально сопряженным несобственным точкам прямых, параллельных прямым, содержащим стороны треугольника Морлея данного треугольника.

Одной из задач современной геометрии треугольника является нахождение и исследование инвариантных образов (точек, прямых и кривых), порождаемых невырожденным треугольником. Например, если ABC – данный треугольник, а $A_P B_P C_P$ – педальный треугольник точки P, то, рассматривая пересечения $Q_A = BB_P \cap CC_P$, $Q_B = CC_P \cap AA_P$, $Q_C = AA_P \cap BB_P$, приходим к выводу, что множество точек плоскости P, для которых треугольник $Q_a Q_b Q_c$ перспективен треугольнику ABC, состоит из кубики Дарбу, образованной точками, педальные треугольники которых являются чевиановыми; описанной окружностью треугольника ABC вместе с бесконечно удаленной прямой. Множеством центров перспективы треугольников $Q_a Q_b Q_c$ и ABC являются, соответственно, кубика Люка, состоящая из точек, чевиановы треугольники которых являются педальными; кубика, ассоциированная с прямыми Симсона треугольника ABC.

Целью настоящей работы является исследование кубики, ассоциированной с прямыми Симсона треугольника ABC. Отождествим собственные точки расширенной евклидовой плоскости $\overline{R}^2$ с соответствующими этим точкам комплексными числами. Точки несобственной прямой определим как несобственные точки пучка прямых с центром в начале координат: $\overline{u}z + u\overline{z} = 0, \quad u \neq 0.$ Ассоциированной комплексной координатой несобственной точки прямой этого пучка, по определению, назовем предел

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right) = -\left(\frac{\overline{u}}{u}\right), \tag{1}$$

когда точка M с комплексной координатой z стремится к бесконечности вдоль этой прямой. Примем описанную окружность треугольника ABC за единичную: $z\overline{z} = 1$. Тогда комплексные координаты проекций A_P, B_P, C_P точки P единичной окружности на прямые BC, CA, AB определятся формулами $a_p = \frac{1}{2}\left(b + c + p - bc\overline{p}\right)$, $b_p = \frac{1}{2}\left(c + a + p - ca\overline{p}\right)$, $c_p = \frac{1}{2}\left(a + b + p - ab\overline{p}\right)$ [3]. Точки A_P, B_P, C_P лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC. Находя комплексные координаты точек пересечения $Q_A = BB_P \cap CC_P$, $Q_B = CC_P \cap AA_P$, $Q_C = AA_P \cap BB_P$, получим параметрическое выражение комплексной координаты z точки M пересечения прямых AQ_A, BQ_B, CQ_C

$$z = \frac{\sigma_1 p^3 + \left(\sigma_1^2 - 4\sigma_2\right)p^2 + \left(6\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2\right)p + \sigma_1\sigma_3}{3p^3 - \sigma_1 p^2 - \sigma_2 p + 3\sigma_3}, \tag{2}$$

где символами $\sigma_1 = a+b+c, \quad \sigma_2 = ab+bc+ca, \quad \sigma_3 = abc$ обозначены симметрические многочлены чисел a,b,c. Параметрическое уравнение (2) определяет кривую третьего порядка. Таким образом, если точка P описывает единичную окружность, точка Q описывает кубику (2). Если точка P является несобственной точкой, тогда точки A_P, B_P, C_P также являются несобственными точками соответственно прямых $BC,\ CA,\ AB$. В этом случае треугольник ABC будет серединным треугольником для треугольника $Q_AQ_BQ_C$, центром перспективы которых является точка G пересечения медиан треугольника ABC с комплексной координатой $\frac{1}{3}\sigma_1$, являющаяся изолированной особой точкой кубики (2). Множество полюсов прямых Симсона точек P

$$2z - 2\sigma_3\overline{pz} - p - \sigma_1 + \sigma_2\overline{p} + \sigma_3\overline{p}^2 = 0 \tag{3}$$

описанной окружности треугольника ABC относительно изотомической коники [1]

$$\begin{gathered}\left(3\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1^2\right)z^2 + \left(9 - \sigma_1\bar{\sigma}_1\right)z\bar{z} + \\ +\left(3\sigma_2 - \sigma_1^2\right)\bar{z}^2 + \left(\bar{\sigma}_1\left(\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 3\right) - 2\sigma_1\bar{\sigma}_2\right)z + \\ +\left(\sigma_1\left(\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 3\right) - 2\bar{\sigma}_1\sigma_2\right)\bar{z} - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2{}^2\right)\left(\bar{\sigma}_1^2 - 2\bar{\sigma}_2{}^2\right) + \frac{9}{2} = 0\end{gathered} \tag{4}$$

также образует кубику (2), называемую кубикой Симсона треугольника ABC [2].

Предложение 1. *Кубика Симсона инвариантна относительно изотомического сопряжения плоскости.*

Доказательство. Изотомическое сопряжение плоскости $\bar{R}^2$, связывающее комплексные координаты p и q прообраза P и образа Q, определяется формулой

$$3\left(p+q+\sigma_3\overline{pq}-\sigma_1\right)+\left(\bar{p}+\bar{q}+\bar{\sigma}_3 pq-\bar{\sigma}_1\right)\sigma_2+$$
$$+\sigma_1\left(p\bar{q}+\bar{p}q-\sigma_1\left(\bar{p}+\bar{q}\right)-\bar{\sigma}_1\left(p+q\right)+1+\sigma_1\bar{\sigma}_1\right)=0. \quad (5)$$

Для доказательства заметим, что комплексные координаты полюсов прямых Симсона точек P и $-P$ описанной окружности треугольника ABC удовлетворяют уравнению (5).

Известно [2], что прямые Симсона диаметрально противоположных точек P и $-P$ описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке F окружности Эйлера $\left|2z-\sigma_1\right|=1$ этого треугольника. Точка F имеет комплексную координату $\dfrac{\sigma_1 p^2-\sigma_3}{2p^2}$. Если эта точка описывает окружность Эйлера, то прямая, проходящая через полюсы прямых Симсона точек P и $-P$, огибает конику K, дуальную окружности Эйлера. Решая относительно z систему уравнений прямой $Q_P Q_{-P}$ и производной этого уравнения по параметру p, получим параметрическое уравнение коники K

$$z=\frac{\left(4\sigma_2-\sigma_1^2\right)p^4-2\sigma_1\sigma_3 p^2+\sigma_3\left(\sigma_1\sigma_2-6\sigma_3\right)}{\sigma_1 p^4-6\sigma_3 p^2+\sigma_2\sigma_3}, \quad (6)$$

являющейся эллипсом с центром в точке Лемуана с комплексной координатой $l=2\dfrac{\sigma_2\bar{\sigma}_1-3\sigma_1}{\bar{\sigma}_1\sigma_1-9}$, вписанным в треугольник, для которого треугольник ABC является серединным.

Предложение 2. *Коника K касается кубики Симсона в полюсах прямых Симсона изогонально сопряженных точек бесконечно удаленным точкам прямых, параллельных прямым, содержащим стороны треугольника Морлея треугольника* ABC.

Переобозначим комплексные координаты вершин треугольника ABC, положив их равными, соответственно, a^3, b^3, c^3. Тогда $\sigma_1=a^3+b^3+c^3, \sigma_2=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3,$

$\sigma_3 = a^3b^3c^3$. Решая систему уравнений (2) и (6) относительно p, получим три решения, удовлетворяющих условию $|p| = 1$: $p_1 = \sigma_3, p_2 = \omega\sigma_3, p_3 = \omega^2\sigma_3$, где ω – любое из двух мнимых значений $\sqrt[3]{1}$. Уравнения прямых, параллельных прямым, содержащим стороны треугольника Морлея треугольника ABC, имеют вид:

$$z + \sigma_3^2\bar{z} = 0, z + \omega\sigma_3^2\bar{z} = 0, z + \omega^2\sigma_3^2\bar{z} = 0. \qquad (7)$$

Изогональное сопряжение $\zeta = f(z)$ плоскости, порожденное треугольником ABC, комплексные координаты вершин которого равны, соответственно, a^3, b^3, c^3, определяется формулой [4]

$$\zeta = \frac{\sigma_3\bar{z}^2 - \sigma_2\bar{z} - p + \sigma_1}{1 - z\bar{z}}. \qquad (8)$$

Деля числитель и знаменатель правой части формулы (8) на z^2, переходя к пределу при $z \to \infty$ с учетом формул (1) и (7), находим координаты точек $p_1 = \sigma_3,\ p_2 = \omega^2\sigma_3,\ p_3 = \omega\sigma_3$, изогонально сопряженных бесконечно удаленным точкам прямых (7).

Рассмотрим вновь прямые Симсона диаметрально противоположных точек P и $-P$ описанной окружности треугольника ABC, пересекающиеся в точке F окружности Эйлера этого треугольника. Кроме этой пары на описанной окружности треугольника ABC существует еще одна точка Q с комплексной координатой $-\dfrac{\sigma_3}{p^2}$, прямая Симсона (3) которой проходит через F. Точка Q является одной из точек пересечения прямой HF с описанной окружностью треугольника ABC, где H – ортоцентр треугольника ABC с комплексной координатой σ_1.

Прямая, проходящая через полюсы прямых Симсона точек P и $-P$ пересекает кубику Симсона в полюсе прямой Симсона точки $-Q$. Действительно, используя (2) и составляя уравнение прямой $Z_P Z_{-P}$, убеждаемся, что эта прямая проходит через точку Z_{-Q}, лежащую на кубике Симсона. Касательные к кубике Симсона в полюсах Z_P и Z_{-P} прямых Симсона точек P и $-P$ пересекаются на кубике в полюсе прямой Симсона точки Q. Если прямая $Z_P Z_{-P}$ касается коники K в точке S, тогда точки S и Z_{-Q} гармонически сопряжены относительно Z_P и Z_{-P}; точка, изотомически сопряженная точке S, является полюсом касательной к окружности Эйлера в точке F.

Обозначим через U, V, W третьи точки пересечения кубики с прямыми, содержащими стороны AB, BC, CA треугольника ABC. Точки U, V, W являются полюсами прямых Симсона соответственно точек $-C,-A,-B$, диаметрально противоположных вершинам треугольника ABC, относительно мнимой коники (4). Точки U, V, W лежат на одной прямой

$$2\left(\bar{\sigma}_1\sigma_2\bar{\sigma}_2-3\bar{\sigma}_1-2\sigma_1\bar{\sigma}_2\right)z+$$
$$+2\left(\sigma_1\sigma_2\bar{\sigma}_2-3\sigma_1-2\bar{\sigma}_1\sigma_2\right)\bar{z}-\left(\sigma_1\bar{\sigma}_1-1\right)\left(\sigma_1\bar{\sigma}_1-9\right)=0$$

и имеют комплексные координаты

$$u=\frac{\sigma_1\sigma_2-5\sigma_3-2c^2\left(a+b\right)}{2\left(ab-c^2\right)},v=\frac{\sigma_1\sigma_2-5\sigma_3-2a^2\left(b+c\right)}{2\left(bc-a^2\right)},$$

$$w=\frac{\sigma_1\sigma_2-5\sigma_3-2b^2\left(c+a\right)}{2\left(ca-b^2\right)}, \tag{7}$$

откуда следует, что если треугольник ABC равнобедренный или равносторонний, т. е. когда выполняются одно или все равенства $a^2 = bc, b^2 = ca, c^2 = ab$, то одна или все точки U, V, W пересечения прямых AB, BC, CA с кубикой Симсона являются несобственными точками соответственно прямых AB, BC, CA. В этих случаях треугольник UVW перспективен треугольнику ABC. В случае равностороннего треугольника коника К является описанной окружностью равностороннего треугольника ABC, пробегаемой в противоположном направлении относительно точки P, когда последняя дважды описывает окружность $z\bar{z} = 1$. Действительно, учитывая в (4) $a = 1, b = \omega, c = \omega^2$, получим $z = \bar{p}^2$. Неподвижными точками изотомического преобразования плоскости, порожденного невырожденным треугольником ABC, являются точки T_0, T_1, T_2, T_3 с комплексными координатами

$$\tau_0 = \tfrac{1}{3}(a+b+c), \quad \tau_1 = b+c-a, \quad \tau_2 = c+a-b, \quad \tau_3 = a+b-c.$$

Кубика Симсона всегда проходит через одну и только одну неподвижную точку T_0 и имеет в ней изолированную особенность.

Список литературы

1. *Малаховский Н.В.* Коники, порожденные изогональным и изотомическим преобразованиями плоскости // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2003. Вып. 33. С. 89 – 94.
2. *Jean-Pierre Ehrmann, Bernard Gibert.* The Simson Cubic // Forum Geometricorum. 2001. Vol. 1. S. 107 – 114.
3. *Малаховский Н.В.* Метод комплексных чисел в планиметрии. Калининград, 1996.
4. *Малаховский Н.В.* Об одной геометрической интерпретации аффинной классификации действительных коник // Докл. Междунар. мат. семинара. Калининград, 2002. С. 132 – 137.

N.V. Malakhovskii

CUBIC, ASSOCIATED WITH SIMSON LINES OF TRIANGLE

Using method of complex numbers in planimetry [3] cubic is investigated, formed by poles of Simson lines of a non degenerated triangle relative to the imaginary isotomic conic [1]. It is proved that lines, passing through two mutually isotomic conjugated points of the cubic envelope a conic, which touches the cubic at three points.

УДК 514.75

Г. Матиева
(Ошский государственный университет)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ОБРАЗА СЕТИ ФРЕНЕ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В области Ω евклидова пространства E_3 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении, порожденном заданным семейством гладких линий.

Пусть область $\Omega \subset E_3$ отнесена к подвижному ортонормированному реперу $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i, j, k=1, 2, 3), который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad (1)$$