$$\Omega^{\alpha}_{\bar{i}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{0},$$

$$d\Lambda^{n}_{i\bar{j}} = \Lambda^{n}_{i\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{\bar{j}} - \Lambda^{n}_{i\bar{j}} (\Omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) + \Lambda^{n}_{j\bar{j}} \omega^{j}_{i} +$$

$$+ \delta^{n}_{\bar{i}} \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}} \omega^{0}_{i} + \Lambda^{n}_{i\bar{j}\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{0}.$$

Осуществляя последовательные продолжения системы (2.2), получим фундаментальную последовательность геометрических объектов отображения Ψ_1/V_n :

$$\Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}, \; \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}}, \; \Lambda^{n}_{i\bar{j}}, \; \dots$$

Асимптотический конус для многообразия $\psi^{-1}(\psi_1(M_0))/V_n$ в точке M_0 будет иметь вид:

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} X^{\bar{i}} X^{\bar{j}} = 0, \quad X^{\alpha} = 0. \qquad (2.3)$$

Базисная гиперквадрика инвариантного (n-I)-параметрического линейного семейства гиперквадрик, соприкасающихся в точке M_0 с многообразием $\psi^{-1}(\psi_1(M_0))/V_n$, имеет вид:

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}} X^{\bar{i}} X^{\bar{k}} - 2 X^{\alpha} X^{0} = 0.$$

Список литературы

I. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-Тр.геом.семинара ВИНИТИ, 1973, 4, с.71-I20.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки" ВИНИТИ, Геометрия, I963, с.65-I07.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 I976

УДК 5I3.73

Н.Д.Поляков

СВЯЗНОСТИ НА ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

I. Рассмотрим нечетномерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n = 2q)$. Пусть на M_{n+1} задана почти контактная структура , т.е. дифференциально-геометрическая структура I порядка [3] со структурными объектами $\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, $\xi^{\mathcal{J}}$, $\eta_{\mathcal{K}}$. Компоненты структурных объектов удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \varphi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}} = -\delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + \xi^{\mathcal{J}} \eta_{\mathcal{L}},$$

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \eta_{\mathcal{J}} = 0, \quad \varphi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \xi^{\mathcal{K}} = 0, \quad \xi^{\mathcal{J}} \eta_{\mathcal{J}} = 1. \qquad (I)$$

Автором показано [4] , что на почти контактном многообразии M_{n+1} при дополнительном оснащении полем объекта $\{F^{n+1}_{ij}\}$ возможно определить внутренним образом аффинную связность Γ без кручения. Поэтому в дальнейшем будем считать, что M_{n+1} снабжено такой аффинной связностью. Рассмотрим присоединенное расслоенное пространство $L_{n+1,n+1}$, базой которого является исходное многообразие M_{n+1} , снабженное связностью Γ, слоями которого являются касательные пространства T_x к базе. $(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \dots = 1, 2, \dots, n+1;\ i, j, \dots = 1, 2, \dots n)$.

Предположим теперь, что в пространстве $L_{n+1,n+1}$ определено аналитическое сечение (поле точек), т.е. в каждом слое определена точка M -центр слоя. При фиксации точки базы фиксируется слой и точка в нем.

Пусть формами аффинной связности Γ являются формы ω^J, $\omega_\varkappa^J$. Заметим, что в силу того, что задано сечение, формы ω^J можно отождествить с базовыми формами. Структурные уравнения для форм ω^J, $\omega_\varkappa^J$ имеют вид:

$$\mathcal{D}\omega^J = \omega^\varkappa \wedge \omega_\varkappa^J,$$
$$\mathcal{D}\omega_\varkappa^J = \omega_\varkappa^z \wedge \omega_z^J + R^J_{\varkappa z M}\, \omega^z \wedge \omega^M, \tag{2}$$

где $R^J_{\varkappa z M}$ -тензор кривизны пространства $L_{n+1,n+1}$.

Введем в слоях векторный репер e_J с вершиной в точке M, дифференциальные уравнения движения которого имеют вид: $\delta e_J = \bar\omega^\varkappa_J e_\varkappa$, где $\bar\omega^\varkappa_J = \omega^\varkappa_J \big|_{\omega^J=0}$.

Компоненты структурных объектов удовлетворяют следующим уравнениям:

$$d\varphi_\varkappa^J - \varphi_z^J \omega_\varkappa^z + \varphi_\varkappa^z \omega_z^J = \varphi^J_{\varkappa z}\omega^z, \tag{3}$$
$$d\eta_\varkappa - \eta_z \omega_\varkappa^z = \eta_{\varkappa z}\omega^z, \tag{4}$$
$$d\xi^J + \xi^z \omega_z^J = \xi^J_z \omega^z. \tag{5}$$

При продолжении (3) -(5) получим

$$d\varphi^J_{\varkappa z} - \varphi^J_{Mz}\omega^M_\varkappa - \varphi^J_{\varkappa M}\omega^M_z + \varphi^M_{\varkappa z}\omega^J_M = \varphi^J_{\varkappa z M}\omega^M, \tag{6}$$
$$d\eta_{\varkappa z} - \eta_{Mz}\omega^M_\varkappa - \eta_{\varkappa M}\omega^M_z = \eta_{\varkappa z M}\omega^M, \tag{7}$$
$$d\xi^J_\varkappa + \xi^z_\varkappa \omega^J_z - \xi^J_z \omega^z_\varkappa = \xi^J_{\varkappa z}\omega^z. \tag{8}$$

При дифференцировании (I) получим следующие соотношения на продолженные структурные объекты:

$$\varphi^J_{\varkappa M}\varphi^\varkappa_z + \varphi^J_\varkappa \varphi^\varkappa_{zM} = \xi^J_M \eta_z + \xi^J \eta_{zM},$$
$$\varphi^J_{\varkappa M}\eta_J + \varphi^J_\varkappa \eta_{JM} = 0, \tag{9}$$
$$\varphi^J_{\varkappa M}\xi^\varkappa + \varphi^J_\varkappa \xi^\varkappa_M = 0, \quad \xi^J_M \eta_J + \xi^J \eta_{JM} = 0.$$

2. Поле объекта η_J определяет на M_{n+1} распре-

деление (η) гиперплоскостных элементов. Канонизируем теперь репер так, чтобы первые n векторов e_i принадлежали элементу распределения (η). Аналитически это означает, что $\eta_i = 0$. При такой канонизации дифференциальные уравнения распределения (η) имеют вид:

$$\omega_i^{n+1} = \eta^{n+1}_{i\varkappa}\omega^\varkappa, \tag{I0}$$

где $\eta^{n+1}_{i\varkappa} = -\dfrac{\eta_{ij}}{\eta_{n+1}}$.

Дифференцируя (I0), получим уравнения фундаментального объекта I порядка распределения:

$$\nabla\eta^{n+1}_{ij} = \eta^{n+1}_{ij\varkappa}\omega^\varkappa,$$
$$\nabla\eta^{n+1}_{i\,n+1} - \eta^{n+1}_{ij}\omega^j_{n+1} = \eta^{n+1}_{i\,n+1\,\varkappa}\omega^\varkappa. \tag{II}$$

Следовательно, η^{n+1}_{ij} — тензор. В общем случае можем считать, что тензор η^{n+1}_{ij} —невырожденный, что позволяет ввести в рассмотрение обращенный фундаментальный тензор η^{ij}_{n+1}. Отметим, что тензоры η^{n+1}_{ij}, η^{ij}_{n+1} не симметричны по индексам i и j.

3. Формы ω^i_j, удовлетворяющие в силу (2) и (I0) структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^i_j = \omega^\ell_j \wedge \omega^i_\ell + \omega^\varkappa \wedge (\eta^{n+1}_{j\varkappa}\omega^i_{n+1} + R^i_{j\varkappa z}\omega^z), \tag{I2}$$

имеют расслоенную структуру по отношению к базовым формам ω^J и при $\omega^J = 0$ превращаются в инвариантные формы полной линейной группы. Обозначим через $M^1_{n+1,n}$ главное расслоенное пространство, определенное формами ω^J, ω^i_j. С $M^1_{n+1,n}$ ассоциируется присоединенное расслоенное пространство $A^1_{n+1,n}$, базой которого является исходное многообразие, слоями- плоскости (η), а структурной группой группа преобразований репера в плоскостях (η) с инвариантными формами $\bar{\omega}^i_j$.

Теорема 1. Расслоенное пространство $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ несет почти комплексную структуру со структурным объектом φ^i_j.

Действительно, из уравнений (3), в силу проведенной канонизации, получаем, что φ^i_j образует линейно однородный объект, удовлетворяющий условиям $\varphi^i_j \varphi^j_\ell = -\delta^i_\ell$.

4. Объект $\tilde{\varepsilon}^i_{n+1} = \dfrac{\varepsilon^i}{\varepsilon^{n+1}}$,компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \tilde{\varepsilon}^i_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \tilde{\varepsilon}^i_{n+1\varkappa}\,\omega^\varkappa, \qquad (13)$$

определяет инвариантную нормаль распределения (η).

Построим следующие охваты:

$$H^i_{n+1\,j} = \varphi^i_{j\,n+1} + \varphi^i_{j\ell}\,\tilde{\varepsilon}^\ell_{n+1} - \tilde{\varepsilon}^i_{n+1}\left(\varphi^\ell_j\,\eta^{n+1}_{\ell\,n+1} + \varphi^{n+1}_{j\ell}\,\tilde{\varepsilon}^\ell_{n+1}\right), \qquad (14)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left(H^m_{n+1[i}\,\eta^{n+1}_{|m|\ell]}\,\varphi^\ell_j + H^m_{n+1[j}\,\eta^{n+1}_{|m|\ell]}\,\varphi^\ell_i\right). \qquad (15)$$

Используя уравнения (3) - (8), (11), (13) с учетом проведенной канонизации и соотношений (1), (9), получаем

$$\nabla b_{ij} = b_{ij\varkappa}\,\omega^\varkappa. \qquad (16)$$

b_{ij} образует тензор, симметрический по нижним индексам и удовлетворяющий условиям переместительности I

$$b_{ij}\,\varphi^i_\ell\,\varphi^j_m = b_{\ell m}$$

В общем случае матрица тензора b_{ij} невырождена, в чем можно убедиться, подобрав соответствующим образом компоненты структурных и продолженных объектов с учетом соотношений (1) и (9). Следовательно, существует симметрический тензор b^{ij} такой, что $b^{ij}\,b_{j\ell} = \delta^i_\ell$.

При продолжении (16) получаем

$$\nabla b_{ij\varkappa} - \left(b_{\ell j}\,\eta^{n+1}_{i\varkappa} + b_{i\ell}\,\eta^{n+1}_{j\varkappa}\right)\omega^\ell_{n+1} = b_{ij\varkappa\tau}\,\omega^\tau. \qquad (17)$$

5. Определим внутренним образом в пространстве $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ аффинные связности. Очевидно (см. (12) ,что формы ω^i_j не определяют связности.

Теорема 2. Формы

$$\begin{aligned} \theta^i &= \omega^i - \mathcal{Z}^i_{n+1}\,\omega^{n+1}, \\ \theta^i_j &= \omega^i_j - \gamma^i_{j\varkappa}\,\omega^\varkappa \end{aligned} \qquad (18)$$

удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [2] и определяют аффинную связность на $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ тогда и только тогда, когда заданы поля

$$\begin{aligned} &\nabla \mathcal{Z}^i_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \mathcal{Z}^i_{n+1\,\varkappa}\,\omega^\varkappa, \\ &\nabla \gamma^i_{j\varkappa} + \eta^{n+1}_{j\varkappa}\,\omega^i_{n+1} = \gamma^i_{j\varkappa\tau}\,\omega^\tau. \end{aligned} \qquad (19)$$

Таким образом, для построения на $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ внутренне определенной аффинной связности нужно построить охваты объектов $\{\mathcal{Z}^i_{n+1}\}$, $\{\gamma^i_{j\varkappa}\ \ \eta^{n+1}_{j\varkappa}\}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathcal{Z}}{}^i_{n+1} &= \tilde{\varepsilon}^i_{n+1}, \\ \overset{1}{\gamma}{}^i_{j\varkappa} &= -\frac{1}{2}\,b^{it}\left[b_{tj\varkappa} - \left(b_{tm}\,\eta^{n+1}_{j\varkappa} + b_{mj}\,\eta^{n+1}_{t\varkappa}\right)\tilde{\varepsilon}^m_{n+1}\right] \end{aligned} \qquad (20)$$

и

$$\begin{aligned} \overset{2}{\mathcal{Z}}{}^i_{n+1} &= \tilde{\varepsilon}^i_{n+1}, \\ \overset{2}{\gamma}{}^i_{j\varkappa} &= -\frac{1}{2}\,\varphi^\ell_j\left(\varphi^i_{\ell\varkappa} + \eta^{n+1}_{m\varkappa}\,\varphi^m_\ell\,\tilde{\varepsilon}^i_{n+1}\right). \end{aligned} \qquad (21)$$

Аффинную связность, определенную охватами (20), обозначим через $\overset{1}{\gamma}$, а охватами (21) - ($\overset{2}{\gamma}$). Формы аффинной связности обозначим, соответственно, через $\overset{1}{\theta}{}^i$, $\overset{1}{\theta}{}^i_j$ и $\overset{2}{\theta}{}^i$, $\overset{2}{\theta}{}^i_j$. В общем случае эти связности с кручением.

Можно показать, что связность $\overset{1}{\gamma}$ является метрической, а $\overset{2}{\gamma}$ -почти комплексной [I].

С аффиной связностью $\overset{1}{\gamma}$ ассоциируется пространство римановой связности $V_{n+1,n}$, метрический тензор которого удовлетворяет условию переместительности. Значит, $V_{n+1,n}$ снабжено почти эрмитовой структурой.

Итак, доказаны

Теорема 3. В расслоенном пространстве $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ определяется внутренним образом риманова связность с кручением и почти комплексная связность с кручением.

Теорема 4. Пространство римановой связности $V_{n+1,n}$, ассоциированное с аффиной связностью $\overset{1}{\gamma}$, несет почти эрмитову структуру со структурными объектами

Список литературы

I. Б е к л е м и ш е в Д.В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. В сб.: Геометрия. I963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., I965, с. I65-2I0.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр. Моск. мат. о-ва", I953, №2, 275-382.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у И.М. (f,ε,η,ξ)- -структура на дифференцируемых многообразиях. - В сб. Проблемы геометрии, I975 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., I975, 5-22.

4. П о л я к о в Н.Д., Структуры, индуцированные почти контактной структурой. - Тезисы докладов УI Всес. конф. по совр. пробл. геометр. Вильнюс, I975, I93-I95.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 7 1976

УДК 513.73

Ю.И. П о п о в

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС. I

Продолжено исследование m-мерных вырожденных (как распадающихся, так и нераспадающихся) гиперполос CH^r_m ранга r проективного пространства P_n $(n>m>r)$, которые изучались ранее в работах [1], [2]. В данной работе показано, что аффинные связности без кручения первого и второго рода внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности 3-го порядка образующего элемента вырожденной гиперполосы CH^r_m. Рассмотрены аналитические и геометрические признаки эквиаффинных связностей первого и второго рода конических и плоских вырожденных гиперполос CH^r_m [1].

Основным аналитическим аппаратом является аппарат внешних дифференциальных форм Картана, все построения в работе ведутся в инвариантной форме в репере I-го порядка, присоединенном к элементу гиперполосы CH^r_m.

1) Во всей работе используется следующая схема индексов: $p,q,t,s,f,\ldots = 1,2,\ldots,r$; $i,j,k,\ell,\ldots = r+1,\ldots,m$; $\alpha,\beta,\gamma,\ldots = m+1,\ldots,n-1$; $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\ldots = 0,1,2,\ldots,n$, а также терминология и обозначения, введенные в статьях [1], [2].

2) Исследование проведем только для распадающихся гиперполос CH^r_m [I]. Однако аналогичные выводы и теоремы имеют место и для вырожденных нераспадающихся гиперполос CH^r_m [2].

I. Присоединим к элементу (A,τ) распадающейся гиперполосы $CH^r_m \subset P_n$ подвижной проективный точечный репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ перво-