

*Е. В. Волхонская, Е. В. Коротей, К. В. Власова*

## **ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПРИЕМА РЗС НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА**

*Рассмотрен механизм возникновения ошибки при определении времени приема РЗС и предложена методика расчета вероятности возникновения такой ошибки. Проведен сравнительный анализ максимальной вероятности ошибки при определении времени приема РЗС для фазоманипулированных радиосигналов на основе кодов Баркера и радиосигналов без внутримпульсной модуляции.*

*The error origins in determining of reception time of radio probing signal are considered in this article. Also the method of error probability calculation was offered in this work. The analysis of maximum probability of such error was carried out for phase-shift keyed signal on the base of Barker's code and radio signal without intrapulse modulation.*

---

© Волхонская Е. В., Коротей Е. В., Власова К. В., 2014.

*Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2014. Вып. 4. С. 93 – 100.*



**Ключевые слова:** радиозондирующий сигнал, база радиосигнала, согласованная фильтрация, время приема (сигнала).

**Key words:** radio probing signal, base of radio signal, coordinated filtering, reception time (of signal).

При приеме радиозондирующего сигнала (РЗС) на вход согласованного фильтра поступает аддитивная смесь узкополосного полезного сигнала и шума; важным является правильное определение времени приема сигнала (его полного поступления на вход согласованного фильтра) [1; 2]. Если время приема определено верно, то известен временной интервал, в пределах которого на фоне шумов присутствует сигнал и данная реализация может подвергаться дальнейшей обработке. В случае неверного определения данного параметра возможна одна из двух ситуаций:

- 1) оценка времени приема сигнала превышает истинное значение;
- 2) оценка времени приема сигнала меньше истинного значения.

Первый случай не столь критичен, так как получаемая при этом реализация аддитивной смеси оказывается большей по длительности и по-прежнему содержит всю информацию о сигнале. Однако чем больше будет длительность реализации по сравнению с длительностью сигнала, тем меньше будет отношение сигнал/шум в смеси, а значит, тем труднее будет извлечь полезную информацию.

Второй случай неприемлем, поскольку при этом длительность реализации оказывается меньше длительности сигнала, следовательно, часть информации о сигнале безвозвратно теряется.

В данной работе рассмотрен случай согласованной фильтрации смеси РЗС на основе кода Баркера и аддитивного шума [3]. Для определенности в качестве модулирующих функций были выбраны 5, 7, 11 и 13-и позиционные коды Баркера. Полезный сигнал на выходе согласованного фильтра пропорционален автокорреляционной функции (АКФ) входного сигнала, смещенной по оси времени на длительность радиозондирующего импульса  $\tau_n$ . Если шум на входе фильтра гауссов, то и на выходе фильтра он остается гауссовым, так как фильтр является линейным. При этом изменяется лишь форма спектра мощности: от прямоугольной на входе фильтра до кривой, повторяющей по форме квадрат АЧХ фильтра (то есть спектр мощности входного сигнала), на выходе фильтра.

Предполагалось, что шум на входе фильтра имеет равномерную спектральную плотность средней мощности  $W_0$  в полосе частот шириной  $\Delta f$

$$S_{\text{вх}}^2(\omega) = \begin{cases} W_0, & |\omega - \omega_0| \leq \pi \Delta f \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \pi \Delta f \end{cases},$$

где  $\omega_0$  — центральная частота спектра шума, выбираемая в соответствии с несущей частотой РЗС; тогда дисперсия шума на входе фильтра определяется выражением

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = W_0 \Delta f.$$

Согласно спектральному методу спектральная плотность средней мощности шума на выходе фильтра



$$S_{\text{вых}}^2(\omega) = S_{\text{вх}}^2(\omega) K^2(\omega) = \begin{cases} W_0 K^2(\omega), & |\omega - \omega_0| \leq \pi \Delta f \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \pi \Delta f \end{cases}$$

где коэффициент передачи мощности согласованного фильтра определяется как

$$K^2(\omega) = |K(j\omega)|^2 = |B \cdot S_{\text{сигн}}^*(j\omega) \cdot \exp(-j\omega\tau_{\text{н}})|^2 = B^2 \cdot S_{\text{сигн}}^2(\omega).$$

Здесь  $K(j\omega)$  – комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра по напряжению,  $S_{\text{сигн}}(j\omega)$  – спектральная плотность полезного сигнала на входе согласованного фильтра, а  $\tau_{\text{н}}$  – его длительность. Константа  $B$  обычно подбирается таким образом, чтобы энергия полезного сигнала на входе и выходе фильтра была одинакова

$$B = \sqrt{E_{\text{вх}} / \int_{-\tau_{\text{н}}}^{\tau_{\text{н}}} K_{\text{вх}}^2(\tau) d\tau},$$

где через  $K_{\text{вх}}(\tau)$  обозначена АКФ входного сигнала. Дисперсию шума на выходе фильтра можно определить следующим образом:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \pi \Delta f}^{\omega_0 + \pi \Delta f} S_{\text{вых}}^2(\omega) d\omega = \frac{W_0 B^2}{2\pi} \int_{\omega_0 - \pi \Delta f}^{\omega_0 + \pi \Delta f} S_{\text{сигн}}^2(\omega) d\omega.$$

Поскольку шум на входе фильтра является широкополосным по отношению к РЗС, то пределы интегрирования можно приближенно заменить на бесконечные. Тогда дисперсия шума на выходе фильтра оказывается равной

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{W_0 B^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{сигн}}^2(\omega) d\omega = W_0 B^2 E_{\text{вх}} = \frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{\Delta f} B^2 E_{\text{вх}}.$$

Если ввести отношение сигнал/шум по мощности на входе фильтра согласно выражению

$$SNR_{\text{вх}} = \frac{\overline{a_{\text{вх}}^2}}{\sigma_{\text{вх}}^2} = \frac{A_m^2}{2\sigma_{\text{вх}}^2},$$

где  $A_m$  – амплитуда РЗС на входе согласованного фильтра,  $\overline{a_{\text{вх}}^2}$  – средняя за время длительности мощность РЗС, то дисперсия шума на выходе фильтра будет связана с отношением сигнал/шум на входе фильтра соотношением вида

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{\Delta f} B^2 E_{\text{вх}} = \frac{A_m^4 B^2 \tau_{\text{н}}}{4 \cdot SNR_{\text{вх}} \Delta f},$$

где учтено, что энергия входного РЗС  $E_{\text{вх}} = \frac{1}{2} A_m^2 \tau_{\text{н}}$ .

Ниже пояснен механизм возникновения ошибки при определении времени приема РЗС и предложена методика расчета вероятности ее возникновения. Согласно предложенной методике ошибка появляется всякий раз, когда одновременно произойдут два события:

1) вследствие влияния шумов значение суммарного сигнала на выходе согласованного фильтра в момент времени  $t = \tau_{\text{н}}$  окажется ниже некоторого порогового значения  $K_{\text{пор}}$ ;



2) вследствие влияния тех же шумов значение суммарного сигнала на выходе согласованного фильтра в момент времени  $t \neq \tau_n$  (но при этом  $t \in [0, 2\tau_n]$ ) окажется выше того же порогового значения  $K_{\text{пор}}$ .

Второе событие может произойти в одном из двух случаев:

1) если значение суммарного сигнала на выходе согласованного фильтра превысит пороговое значение  $K_{\text{пор}}$  в некоторый момент времени  $t \neq \tau_n$  в пределах главного лепестка (когда  $t \in [\tau_n - \tau_n, \tau_n + \tau_n]$ ), где  $\tau_n$  – длительность одной позиции в коде Баркера;

2) если значение суммарного сигнала на выходе согласованного фильтра превысит пороговое значение  $K_{\text{пор}}$  в некоторый момент времени  $t \neq \tau_n$  в пределах любого из  $2(M-1)$  боковых лепестков (когда  $t \in [\tau_n \pm (2i+1)\tau_n, \tau_n \pm (2i+3)\tau_n]$ ), где  $M$  – позиционность кода Баркера, а  $i = 0.. \frac{M-3}{2}$ . Так как в отсутствии шумов значение выходного сигнала в момент времени  $t = \tau_n$  равно  $BE_{\text{вх}}$ , то вероятность первого события

$$P_1 = P(n(t = \tau_n) + BE_{\text{вх}} \leq K_{\text{пор}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{вых}}} \int_{-\infty}^{K_{\text{пор}} - BE_{\text{вх}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\text{вых}}^2}\right) dx = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{K_{\text{пор}} - BE_{\text{вх}}}{\sigma_{\text{вых}}}\right), \quad (1)$$

где использована табулированная функция Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ , а  $n(t)$  – мгновенное значение шума. Условная вероятность того, что второе событие произойдет в пределах главного лепестка, равна

$$P_{2,\text{гл}} = P(n(t) + a_{\text{вых,гл}} \geq K_{\text{пор}} \mid t \in [\tau_n - \tau_n, \tau_n + \tau_n]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{вых}}} \int_{K_{\text{пор}} - a_{\text{вых,гл}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\text{вых}}^2}\right) dx = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{K_{\text{пор}} - a_{\text{вых,гл}}}{\sigma_{\text{вых}}}\right),$$

где  $a_{\text{вых,гл}}$  – значение полезного сигнала на выходе согласованного фильтра в пределах главного лепестка, которое может принимать любые значения в диапазоне от  $-BE_{\text{вх}}$  до  $BE_{\text{вх}}$ , а условная вероятность того, что второе событие произойдет в пределах любого из боковых лепестков

$$P_{2,\text{бок}} = P\left(n(t) + a_{\text{вых,бок}} \geq K_{\text{пор}} \mid t \in [\tau_n \pm (2i+1)\tau_n, \tau_n \pm (2i+3)\tau_n], i = 0.. \frac{M-3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{вых}}} \int_{K_{\text{пор}} - a_{\text{вых,бок}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\text{вых}}^2}\right) dx = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{K_{\text{пор}} - a_{\text{вых,бок}}}{\sigma_{\text{вых}}}\right),$$

где  $a_{\text{вых,бок}}$  – значение полезного сигнала на выходе согласованного фильтра в пределах любого из боковых лепестков, которое может принимать любые значения в диапазоне от  $-\frac{BE_{\text{вх}}}{M}$  до  $\frac{BE_{\text{вх}}}{M}$ .

Вероятность того, что второе событие произойдет именно в пределах главного или любого из боковых лепестков может быть легко определена с помощью следующей геометрической трактовки вероятности [4]:



$$P_{\text{гл}} = \frac{S_{\text{гл}}}{S_{\text{гл}} + 2(M-1)S_{\text{бок}}} = \frac{2BE_{\text{вх}}\tau_{\text{п}}}{2BE_{\text{вх}}\tau_{\text{п}} + 2(M-1)\frac{2BE_{\text{вх}}\tau_{\text{п}}}{M}} = \frac{M}{3M-2},$$

$$P_{\text{бок}} = \frac{2(M-1)S_{\text{бок}}}{S_{\text{гл}} + 2(M-1)S_{\text{бок}}} = \frac{2(M-1)\frac{2BE_{\text{вх}}\tau_{\text{п}}}{M}}{2BE_{\text{вх}}\tau_{\text{п}} + 2(M-1)\frac{2BE_{\text{вх}}\tau_{\text{п}}}{M}} = \frac{2M-2}{3M-2},$$

где  $S_{\text{гл}}$  и  $S_{\text{бок}}$  – площади главного и бокового лепестков АКФ входного радиосигнала. Тогда полная вероятность наступления второго события:

$$P_2 = P_{2,\text{гл}} P_{\text{гл}} + P_{2,\text{бок}} P_{\text{бок}}.$$

Поскольку значение полезного сигнала на выходе согласованного фильтра в пределах главного или бокового лепестка может быть любым, а события, соответствующие любой из таких реализаций сигнала, несовместны, то необходимо просуммировать вероятности, соответствующие отдельным таким реализациям.

Плотность вероятности того, что некоторая случайная величина  $A_1 \in [-BE_{\text{вх}}, BE_{\text{вх}}]$  принимает значение в диапазоне  $[a_1, a_1 + da_1]$  (рис. 1) равна [4]

$$w(a_1) = \frac{dP(A_1 \in [a_1, a_1 + da_1])}{da_1} = \frac{1}{S_{\text{ромб}}} \cdot \frac{dS_{\text{трапец}}}{da_1} = \frac{1}{BE_{\text{вх}}} \cdot \left(1 - \frac{|a_1|}{BE_{\text{вх}}}\right). \quad (2)$$

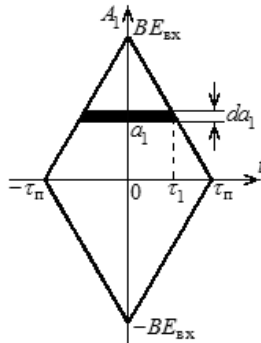


Рис. 1. К определению плотности вероятности

По аналогии можно записать плотность вероятности того, что некоторая случайная величина  $A_2 \in \left[-\frac{BE_{\text{вх}}}{M}, \frac{BE_{\text{вх}}}{M}\right]$  принимает значение в диапазоне  $[a_2, a_2 + da_2]$

$$w(a_2) = \frac{M}{BE_{\text{вх}}} \cdot \left(1 - \frac{M|a_2|}{BE_{\text{вх}}}\right). \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что условие нормировки для записанных плотностей вероятности выполняется

$$\int_{-BE_{\text{вх}}}^{BE_{\text{вх}}} w(a_1) da_1 = 1; \quad \int_{-\frac{BE_{\text{вх}}}{M}}^{\frac{BE_{\text{вх}}}{M}} w(a_2) da_2 = 1.$$



Используя плотности вероятности (2) и (3) в качестве весовых функций, можно легко просуммировать вероятности  $P_{2.гр}(a_1)$  и  $P_{2.бок}(a_2)$  для различных значений  $a_1$  и  $a_2$ :

$$P_{2.гр}^\Sigma = \int_{-BE_{вх}}^{BE_{вх}} P_{2.гр}(a_1)w(a_1)da_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_{вых}}{BE_{вх}} \left\{ \left( 1 + \frac{K_{пор}}{BE_{вх}} \right) J_1 + \left( 1 - \frac{K_{пор}}{BE_{вх}} \right) J_2 - \frac{\sigma_{вых}}{BE_{вх}} (J_3 - J_4) \right\}, \quad (4)$$

где  $J_1 = F_1(t_2) - F_1(t_1)$ ,  $J_2 = F_1(t_1) - F_1(t_3)$ ,  $J_3 = F_2(t_2) - F_2(t_1)$ ,  $J_4 = F_2(t_1) - F_2(t_3)$ ,

$$F_1(t) = t \cdot \Phi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad F_2(t) = \frac{t^2 - 1}{2} \Phi(t) + \frac{t}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

и введены обозначения  $t_1 = \frac{K_{пор}}{\sigma_{вых}}$ ,  $t_2 = \frac{K_{пор} + BE_{вх}}{\sigma_{вых}}$  и  $t_3 = \frac{K_{пор} - BE_{вх}}{\sigma_{вых}}$ ;

$$P_{2.бок}^\Sigma = \frac{1}{2} - \frac{M\sigma_{вых}}{BE_{вх}} \left\{ \left( 1 + \frac{MK_{пор}}{BE_{вх}} \right) J'_1 + \left( 1 - \frac{MK_{пор}}{BE_{вх}} \right) J'_2 - \frac{M\sigma_{вых}}{BE_{вх}} (J'_3 - J'_4) \right\},$$

где  $J'_1, J'_2, J'_3$  и  $J'_4$  получаются из  $J_1, J_2, J_3$  и  $J_4$  путем замены  $t_2$  и  $t_3$  на  $t'_2 = \frac{MK_{пор} + BE_{вх}}{M\sigma_{вых}}$  и  $t'_3 = \frac{MK_{пор} - BE_{вх}}{M\sigma_{вых}}$  соответственно.

Тогда искомая вероятность неправильного определения времени приема РЗС на основе кода Баркера оказывается равной

$$P(K_{пор}) = P_1 \cdot P_2 = \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{K_{пор} - BE_{вх}}{\sigma_{вых}}\right) \right] \cdot \left\{ \frac{M}{3M - 2} P_{2.гр}^\Sigma + \frac{2M - 2}{3M - 2} P_{2.бок}^\Sigma \right\}. \quad (5)$$

Кривые вероятности (5) имеют ярко выраженный максимум при некотором значении порога  $K_{пор}$ . С уменьшением отношения сигнал/шум наибольшее значение вероятности ошибки, достигаемое при данном пороге, увеличивается. На рисунке 2 приведен график зависимости максимальной вероятности ошибки определения времени приема РЗС на основе кода Баркера с разрядностью  $M = 5, M = 7, M = 11$  и  $M = 13$  на фоне белого шума. Здесь же представлена зависимость максимальной вероятности ошибки определения времени приема РЗС без внутриимпульсной модуляции. Оценка вероятности ошибки для немодулированного РЗС осуществлялась по произведению вероятностей, определяемых выражениями (1) и (4), поскольку АКФ такого простого РЗС имеет треугольную огибающую и не содержит боковых лепестков.

Анализ полученных зависимостей показывает, что переход к РЗС с большими базами (в данном примере с большей разрядностью  $M$ ) позволяет уменьшить вероятность ошибки определения времени приема. При типичном для организации радиосвязи в канале уровне значимости 0,95–0,98 (вероятности ошибки 0,02–0,05) отношение сигнал/шум на входе согласованного фильтра должно быть не хуже чем: -24,5 дБ – для  $M = 5$ ; -26 дБ – для  $M = 7$ ; -28 дБ – для  $M = 11$ ; -28,7 дБ – для  $M = 13$ . Таким образом, выигрыш в критическом значении отношения сигнал/шум на входе согласованного фильтра составляет 4,3 дБ при переходе от РЗС на основе кода Баркера с  $M = 5$  к такому же РЗС с  $M = 13$ .

При одном и том же уровне значимости отношение сигнал/шум на входе согласованного фильтра должно быть не хуже -14 дБ при исполь-



зовании РЗС без внутриимпульсной модуляции (простых РЗС). А это означает, что переход от простых РЗС к сложным дает выигрыш в критическом значении отношения сигнал/шум от 10,5 до 14,7 дБ.

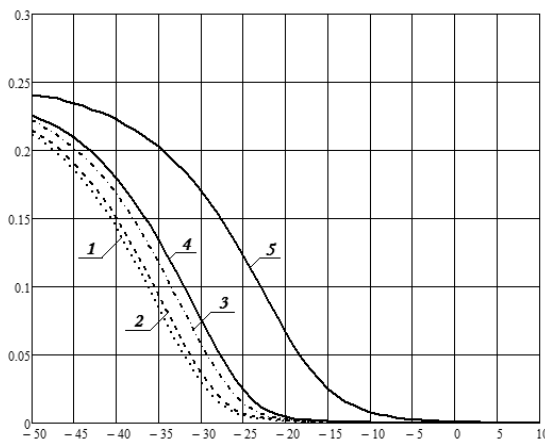


Рис. 2 — Кривые максимальной вероятности ошибки определения времени приема РЗС без модуляции и на основе кода Баркера с разрядностью: 1 —  $M = 5$ , 2 —  $M = 7$ , 3 —  $M = 11$ , 4 —  $M = 13$  и 5 — РЗС без внутриимпульсной модуляции на фоне белого шума: по оси абсцисс отложена величина отношения сигнал/шум на входе согласованного фильтра в дБ, по оси ординат — значение вероятности

Полученные критические значения отношения сигнал/шум очень малы и это доказывает, что с этой точки зрения корреляционный анализ для сложных узкополосных РЗС по-прежнему применим. Ситуация может сильно измениться в том случае, когда вследствие многолучевости отраженного от цели или ионосферы сигнала вершина АКФ окажется плоской, что затруднит решение задачи определения времени приема радиосигнала.

*Работа выполнена в рамках НИР на выполнение государственных работ по теме: «Разработка эффективных алгоритмов обработки сигналов в судовых локационных и навигационных устройствах» (№ 2013-ИГЗ).*

#### Список литературы

1. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М., 1983.
2. Бакулев П. А. Радиолокационные системы : учебник для вузов. М., 2004.
3. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов. М., 1988.
4. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем : учеб. пособие. М., 2003.

#### Об авторах

Елена Вячеславовна Волхонская — д-р. техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: volkhonskaya\_e@mail.ru



Евгений Владимирович Коротей – ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: eugeny\_korotey@mail.ru

Ксения Валерьевна Власова – канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: p\_ksenia@mail.ru

### **About the authors**

Elena Volkhonskaya – Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: volkhonskaya\_e@mail.ru

Evgeny Korotey – lecturer, Department of telecommunications, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: eugeny\_korotey@mail.ru

Ksenia Vlasova – PhD, lecture, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: p\_ksenia@mail.ru