$$\omega^1 \wedge (\omega^2_1 + \omega^1_1 + \omega^2) - \omega^3_2 \wedge \omega^2_3 = 0, \qquad (3.4)$$
$$\omega^i \wedge (\omega^j_j + \omega^i_j + \omega^j) + \omega^3_j \wedge \omega^i_3 = 0,$$

или, учитывая систему уравнений Пфаффа, определяющих пару $\overline{B}^\circ$, получаем конечные соотношения:

$$\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{21} = 0,$$
$$\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{11} = 0,$$
$$\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{12}\Gamma^1_{31} + \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{32} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{31} = 0,$$
$$\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{12} + 1 - \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{31} = 0, \qquad (3.5)$$
$$\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{12} + 1 + \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32} - \Gamma^3_{22}\Gamma^1_{31} = 0,$$
$$\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11} + 1 + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31} - \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{32} = 0.$$

Из (2.3) и (2.5) следует утверждение теоремы.

Литература

I. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып.3 (Труды Томского университета, I68), I963, 28-42.

2. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956.

3. В.С.Малаховский, Расслояемые пары конгруэнций фигур в трехмерном проективном пространстве. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, т.3 (печатается).

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 I97I

ЛИПАТОВА Ф.А.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматривается двупараметрическое семейство V (конгруэнция) пар фигур C, M, где C — эллипс, а M — точка, не инцидентная плоскости эллипса. Семейство V называется парой V_0, если характеристическая точка A_1 плоскости эллипса лежит на эллипсе.

Помещая начало A репера R в центр эллипса C, конец вектора $\bar{e}_1$ в точку A_1, конец вектора $\bar{e}_3$ в точку M, конец вектора $\bar{e}_2$ в точку эллипса и, направляя вектор $\bar{e}_2$ по сопряженному к $\bar{e}_1$ направлению, приводим систему пфаффовых уравнений пары V_0 к виду:

$$\begin{gathered}
\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega^2_1 = c\omega^1 + f\omega^2, \quad \omega^1_2 = e\omega^1 + h\omega^2, \\
\omega^3_1 = -a\omega^1 - b\omega^2, \quad \omega^3_2 = p\omega^1 + k\omega^2, \quad \omega^3_3 = s\omega^1 + t\omega^2, \\
\omega^1_1 = \eta\omega^1 + \alpha\omega^2, \quad \omega^2_2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^2, \quad \omega^2_3 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \\
\omega^1_3 = q\omega^1 + r\omega^2,
\end{gathered} \qquad (1)$$

где $\omega^i, \omega_i^\alpha$ -компоненты деривационных формул репера R ,удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства :

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^\kappa \wedge \omega_\kappa^i \ , \ \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^\kappa \wedge \omega_\kappa^j . \tag{2}$$

Уравнения эллипса относительно репера R имеют вид:

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \\ x^3 = 0 . \end{cases} \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е. Пары V_0 называется парой V_0' ,если

$$\rho = \beta = \tau = m_1 = e = c = t = \gamma = \alpha = 0, \tag{4}$$

$$a + \kappa = 0,\ \beta = \eta = -1,\ h = -f,\ m_2 = \frac{1}{\kappa},\ q = \frac{1}{\kappa},$$

причем

$$\kappa(1 - f) \neq 0. \tag{5}$$

Т е о р е м а I. Пара V_0' существует с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система (I) в силу условий (4) примет вид:

$$\omega^3 = -\kappa\omega^1,\ \omega_1^2 = f\omega^2,\ \omega_2^1 = -f\omega^2,\ \omega_1^3 = \kappa\omega^1,$$

$$\omega_2^3 = \kappa\omega^2,\ \omega_3^3 = S\omega^1,\ \omega_1^1 = -\omega^1,\ \omega_2^2 = -\omega^1, \tag{6}$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{\kappa}\omega^2,\ \omega_3^1 = \frac{1}{\kappa}\omega^1.$$

Продолжая эту систему ,убеждаемся,что пара V_0' существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Фокальные поверхности конгруэнции (C) являются неопределенными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокусов имеем систему:

$$(x^1)^2\omega^1 + (x^2)^2\omega^1 - x^1\omega^1 - x^2\omega^2 = 0,$$

$$x^1\omega^1 + x^2\omega^2 - \omega^1 = 0,$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \tag{7}$$

$$x^3 = 0.$$

Исключая из уравнений системы (7) формы ω^1 и ω^2 мы не получим дополнительного соотношения на координаты x^1, x^2.Это означает,что конгруэнция (C) является конгруэнцией коник с неопределенными фокальными поверхностями.

Т е о р е м а 3. Все эллипсы конгруэнции (C) принадлежат конусу φ :

$$\varphi \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - \frac{1}{\kappa^2}(x^3 + \kappa) = 0 . \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.Учитывая соотношение

$$d\kappa = -\kappa(1 + S)\omega^1, \tag{9}$$

являющееся дифференциальным следствием системы (6) ,и уравнения стационарности

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha - \omega^\alpha \tag{10}$$

точки аффинного пространства ,убеждаемся,что

$$d\varphi = \lambda\varphi,\ \lambda = 2\omega^1. \tag{11}$$

Следовательно, φ -инвариантный конус.

Т е о р е м а 4. Характеристическая точка грани $(\bar{e}_2, \bar{e}_3)$ инцидентна прямой AM .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Характеристическая точка грани $(\bar{e}_2, \bar{e}_3)$ определяется формулой

$$\bar{N} = \bar{A} - \kappa\bar{e}_3 , \tag{12}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 5. Плоскости $x^2 = 0$ пары V_0' образуют однопараметрическое семейство.

Утверждение теоремы следует из того,что каждая точка прямой

$$\begin{cases} \kappa f x^1 + x^3 + \kappa = 0, \\ x^2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

является характеристической.

Т е о р е м а 6. Поверхность (A) является торсом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перейдя к реперу $R' = \{A, \tilde{\bar{e}}_1, \tilde{\bar{e}}_2, \tilde{\bar{e}}_3\}$,

где

$$\tilde{\bar{e}}_1 = \bar{e}_1 - \kappa \bar{e}_3, \; \tilde{\bar{e}}_2 = \bar{e}_2, \; \tilde{\bar{e}}_3 = \bar{e}_3, \tag{14}$$

получим, что

$$\tilde{\omega}^3_1 = 0, \quad \tilde{\omega}^3_2 = \kappa(1-f)\,\omega^2. \tag{15}$$

Уравнение асимптотических линий поверхности (A) в силу соотношения (5) примет вид:

$$(\omega^2)^2 = 0. \tag{16}$$

Л и т е р а т у р а

1. В.С.Малаховский, Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_ℓ. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.I (Труды Калининградского университета), 1970, 5-26.
2. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. Москва, 1956.
3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций, Москва. 1950..
4. Ф.А.Липатова, Конгруэнции пар фигур в трехмерном аффинном пространстве, образованные эллипсом и точкой. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.I (Труды Калининградского университета), 1970, 86-93.

С Е М И Н А Р

ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР ПРИ КАЛИНИНГРАДСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.

Научный семинар при кафедре геометрии Калининградского государственного университета начал работу в январе 1970 года. В предыдущем выпуске освещена работа семинара до 12 мая 1970 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 14 октября 1970 года по 5 мая 1971 года.

14.X.1970. В.С.М а л а х о в с к и й, Индуцированно-расслояемая пара поверхностей в P_3.

21.X.1970. В.С.М а л а х о в с к и й, Расслояемая пара конгруэнций фигур в P_3.

28.X.1970. Ф.А.Л и п а т о в а, Об одном классе пар фигур, порожденных эллипсом и точкой.

4.XI.1970. Г.П.Т к а ч, Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве.

11.XI.1970. Ю.И.П о п о в, Об инвариантном оснащении вырожденных гиперполос Γ_m ранга $\tau = \frac{m}{2}$ многомерного проективного пространства P_n.

18.XI.1970. И.Н.Ф е т и с о в а, Многообразия пар фигур в P_n, образованных гиперквадрикой и точкой.

25.XI.1970. В.С.М а л а х о в с к и й, Вырожденные конгруэнции пар фигур в P_3.

2.XII.1970. Г.Л.С в е ш н и к о в а, Конгруэнции кривых второго порядка с тремя фокальными поверхностями, вырождающимися в линии.

6.I.1971. В.С.М а л а х о в с к и й, О способах задания подмногообразий.

13.I.1971. Б.А.А н д р е е в, О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p, q) и точечным пространством. Ассоциированные образы первого порядка.

22.I.1971. В.С.М а л а х о в с к и й, Подмногообразия многооб-