УДК 514.76

***М. Б. Банару*[1]*, Г. А. Банару*[2]**
[1, 2] *Смоленский государственный университет, Россия*
[1, 2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-3

Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли

Установлено, что эрмитова структура на 6-мерном уплощающемся подмногообразии алгебры Кэли является устойчивой в том и только том случае, когда это подмногообразие является вполне геодезическим.

Ключевые слова: алгебра Кэли, 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры октав, устойчивость почти эрмитовой структуры.

В память о дорогом Вадиме Фёдоровиче
Кириченко (1947—2021)

1. Работы 60-х годов прошлого века, автором которых является выдающийся американский геометр Альфред Грей, задали целое направление в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых многообразий. А. Грей установил [1], что каждое из двух так называемых 3-векторных произведений в алгебре Кэли порождает на ее 6-мерном подмногообразии почти эрмитову структуру. Такие структуры исследовались многими математиками, среди которых мы выделим замечательного отечественного геометра Вадима Фёдоровича Кириченко, статьи которого в 1970—1990-х годах были написаны под влиянием

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

работ Альфреда Грея. В. Ф. Кириченко обратил внимание на следующий результат А. Грея: почти эрмитовы структуры, порожденные разными 3-векторными произведениями в алгебре октав на одном и том же подмногообразии, могут отличаться друг от друга. В частности, одна из таких почти эрмитовых структур может быть келеровой, а другая — нет [1]. В. Ф. Кириченко вполне естественным образом ввел понятие устойчивости для почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли. А именно, почти эрмитову структуру на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли он назвал устойчивой, если двойственная ей структура (то есть структура, порожденная другим 3-векторным произведением в алгебре октав) принадлежит тому же классу почти эрмитовых структур [2].

В данной статье мы рассматриваем вопрос об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли. Работа продолжает исследования авторов в данной области, начатые более 20 лет назад (см., например, [3—6] и др.).

2. Как известно, почти эрмитовой (almost Hermitian, *AH*-) структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^{∞}) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием. АН-многообразие называется эрмитовым, если почти комплексная структура интегрируема.

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^{\mathbf{8}}$ — алгебра Кэли. В ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения [1]:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из указанных выше. Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке *p*, $X \in T_p(M^6)$. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [2]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа; 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся (planar, иногда flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав [3].

В работе [7] В.Ф. Кириченко получил структурные уравнения произвольной почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли. Для случая эрмитовой структуры эти уравнения были уточнены. Оказалось, что они имеют следующий вид [4; 5]:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b; \tag{1}$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2}\delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi}\right)\omega_c \wedge \omega^d,$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее $\varphi = 7, 8$; *a, b, c, d, g, h* = 1, 2, 3; $\hat{a} = a + 3$; *k, j* = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Как и в [7], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка;

$$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h; \; D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}};$$

$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \; D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\left\{T_{kj}^{\varphi}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6.

Эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ является уплощающимся в том и только в том случае, если

$$T_{ab}^8 = \mu T_{ab}^7; \quad T_{\hat{a}\hat{b}}^8 = \overline{\mu} T_{\hat{a}\hat{b}}^7; \quad \mu \in C; \quad \mu - const. \tag{2}$$

Отметим, что к числу уплощающихся относятся и 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав [4; 6].

Применив условие Кириченко [2] устойчивости почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}} = 0$$

и учитывая (2), мы приведем уравнения (1) к такому виду:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b \ ; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b ; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c \ . \end{aligned} \qquad (3)$$

Уравнения (3) соответствуют келеровой структуре на уплощающемся подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$, причем выполняются в самом простом частном случае, когда

$$T_{kj}^{\varphi} = 0 ,$$

то есть когда M^6 является вполне геодезическим подмногообразием алгебры Кэли. Это позволяет сформулировать такую теорему.

Теорема. *Эрмитова структура на уплощающемся 6-мерном подмногообразии алгебры октав устойчива в том и только в том случае, когда это подмногообразие является вполне геодезическим.*

Отметим, что данная теорема усиливает известный результат В. Ф. Кириченко об устойчивости келеровой структуры: келерова структура на M^6 устойчива тогда и только тогда, когда M^6 — вполне геодезическое подмногообразие [2, с. 65]. Как и в других наших работах (в том числе упомянутых выше [4—6]) об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли, оказалось, что такие подмногообразия практически всегда обладают свойствами, аналогичным свойствам келеровых M^6. При этом известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры октав с эрмитовой структурой, отличной от келеровой [8; 9].

Список литературы

1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465—504.

2. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Украинский геометрический сборник. 1982. Т. 25. С. 60—68.

3. *Банару М. Б., Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

4. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. 2002. Т. 193, №5. С. 3—16.

5. *Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

6. *Banaru M. B., Banaru G. A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

8. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

9. *Банару М. Б. Банару Г. А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 21—25.

M. B. Banaru[1]*, G. A. Banaru*[2]

[1, 2] *Smolensk State University*

4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia

[1, 2] mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-3

On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra

Submitted on June 27, 2021

We consider 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. As it is known, the so-called Brown — Gray three-fold vector cross products induce almost Hermitian structures on such submanifolds. We select

the case when the almost Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra are Hermitian, i. e. these structures are integrable.

It is proved that the Hermitian structure on a 6-dimensional planar submanifold of Cayley algebra is stable if and only if such submanifold is totally geodesic.

Keywords: Cayley algebra, 6-dimensional planar submanifold of Cayley algebra, stability of the almost Hermitian structure.

References

1. *Gray, A.:* Vector cross products on manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141**, 465—504 (1969).

2. *Kirichenko, V. F.:* Stability of the almost Hermitian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Ukrain. Geom. Sbornik*, **25**, 60—68 (1982).

3. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Russian Mathematical Surveys*, **49**:1, 223—225 (1994).

4. *Banaru, M. B.:* Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. *Sb. Math.*, **193**:5—6, 635—648 (2002).

5. *Banaru, M. B., Banaru G. A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova. Matem.*, **1**:74, 23—32 (2014).

6. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. *SUT J. Math.*, **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Kirichenko, V. F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Izvestia Vuzov. Math.*, **8**, 32—38 (1980).

8. *Banaru, M. B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. *J. Math. Sci.*, **207**:3, 354—388 (2015).

9. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*. Kaliningrad. **48**, 21—25 (2017).