ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I9 1988

УДК 514.763.44

О СВЯЗНОСТЯХ В СТРУКТУРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ИНДУЦИРОВАННОЙ $(\{\xi\eta\varrho)$ -СТРУКТУРЫ В $M_n(F)$

Б.А к м а т о в
(Омский пединститут)

I.В многообразии почти комплексной структуры $M_n(F)$ с заданной аффинной связностью Γ рассмотрим распределение m-мерных линейных элементов Λ, определив его полем геометрического объекта $\{\Lambda_i^J\}$:

$$d\Lambda_i^J - \Lambda_k^J\theta_i^k + \Lambda_i^L\omega_L^J = \Lambda_{iL}^J\omega^L. \tag{I}$$

Продолжив систему (I),получим

$$d\Lambda_{iK}^J - \Lambda_{kK}^J\theta_i^k - \Lambda_{iL}^J\omega_K^L + \Lambda_{iK}^L\omega_L^J - \Lambda_k^J\theta_{iK}^k + \Lambda_i^L\omega_{LK}^J = \Lambda_{iKL}^J\omega^L. \tag{2}$$

Линейные дифференциальные формы $\bar\theta_j^i = \theta_j^i\big|_{\omega^J=0}$ удовлетворяют уравнениям

$$\delta\bar\theta_j^i = \bar\theta_j^k \wedge \bar\theta_k^i \quad (i,j,\ldots = 1,2,\ldots,m;\ J,K,L,\ldots = 1,2,\ldots,n).$$

Известно [I],что фундаментальным объектом первого порядка $\{\Lambda_i^J, \Lambda_{iK}^J\}$ и объектом связности Γ можно охватить объект $\{N_\alpha^J\}$ $(\alpha,\beta,\ldots = m+1,\ldots,n)$

$$dN_\alpha^J - N_\beta^J\theta_\alpha^\beta + N_\alpha^K\omega_K^J = N_{\alpha L}^J\omega^L. \tag{3}$$

Формы $\bar\theta_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\beta\big|_{\omega^J=0}$ удовлетворяют уравнениям $\delta\bar\theta_\beta^\alpha = \bar\theta_\beta^\gamma \wedge \bar\theta_\gamma^\alpha$. Формы $\tilde\omega_K^J = \omega_K^J - \Gamma_{KL}^J\omega^L$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева (см.(4.4)[2]). В каждой точке $x \in M_n$ векторы $\{\vec\Lambda_i, \vec N_\alpha\}$ образуют векторный репер в $T_x(M_n)$.Следовательно, матрица $\left\|\begin{smallmatrix}\Lambda_i^J\\ N_\alpha^J\end{smallmatrix}\right\|$ является невырожденной.Обозначим через $\|\overset{*}{\Lambda}{}_J^i, \overset{*}{N}{}_J^\alpha\|$ обратную матрицу этой матрицы.

2.Формы $\tilde\theta_j^i = \theta_j^i - \overset{1}{\gamma}{}_{jL}^i\omega^L$ определяют линейную связность $\overset{1}{\gamma}$ на распределении Λ, если функции $\overset{1}{\gamma}{}_{jL}^i$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\overset{1}{\gamma}{}_{jL}^i - \overset{1}{\gamma}{}_{kL}^i\theta_j^k - \overset{1}{\gamma}{}_{jK}^i\omega_L^K + \overset{1}{\gamma}{}_{jL}^k\theta_k^i + \overset{1}{\gamma}{}_{jL}^k\overset{1}{\gamma}{}_{kK}^i\omega^K + \theta_{jL}^i = \overset{1}{\gamma}{}_{jLK}^i\omega^K, \tag{4}$$

а формы $\tilde\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\alpha - \overset{2}{\gamma}{}_{\beta L}^\alpha\omega^L$ –линейную связность $\overset{2}{\gamma}$ на нормально-оснащающем распределении $\mathcal{N}$, если

$$d\overset{2}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta L} - \overset{2}{\gamma}{}^{\alpha}_{\gamma L}\theta^{\gamma}_{\beta} - \overset{2}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta K}\omega^{K}_{L} + \overset{2}{\gamma}{}^{\gamma}_{\beta L}\theta^{\alpha}_{\gamma} - \overset{2}{\gamma}{}^{\gamma}_{\beta L}\overset{2}{\gamma}{}^{\alpha}_{\gamma K}\omega^{K} + \theta^{\alpha}_{\beta L} = \overset{2}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta L K}\omega^{K}. \tag{5}$$

Известно, что при этом формы $\tilde{\theta}^{i}_{j}$, $\tilde{\theta}^{\alpha}_{\beta}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [2]. Дифференциальные уравнения (I) и (3), записанные в формах связности $\Gamma, \overset{1}{\gamma}, \overset{2}{\gamma}$ имеют, соответственно вид

$$d\Lambda^{J}_{i} - \Lambda^{J}_{K}\tilde{\theta}^{K}_{i} + \Lambda^{K}_{i}\tilde{\omega}^{J}_{K} = \tilde{\Lambda}^{J}_{iL}\omega^{L}, \tag{6}$$

$$d\mathcal{N}^{J}_{\alpha} - \mathcal{N}^{J}_{\beta}\tilde{\theta}^{\beta}_{\alpha} + \mathcal{N}^{K}_{\alpha}\tilde{\omega}^{J}_{K} = \tilde{\mathcal{N}}^{J}_{\alpha L}\omega^{L}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\Lambda}^{J}_{iL} = \Lambda^{J}_{iL} - \Lambda^{K}_{i}\Gamma^{J}_{KL} + \Lambda^{J}_{K}\overset{1}{\gamma}{}^{K}_{iL}, \tag{8}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}^{J}_{\alpha L} = \mathcal{N}^{J}_{\alpha L} - \mathcal{N}^{K}_{\alpha}\Gamma^{J}_{KL} + \mathcal{N}^{J}_{\beta}\overset{2}{\gamma}{}^{\beta}_{\alpha L}. \tag{9}$$

Функции $\tilde{\Lambda}^{J}_{iL}$ и $\tilde{\mathcal{N}}^{J}_{\alpha L}$ называются ковариантными производными объектов Λ и $\mathcal{N}$ соответственно относительно связностей $\Gamma, \overset{1}{\gamma}, \overset{2}{\gamma}$. Если на $M_n(F)$ выполняются следующие равенства:

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}\tilde{\Lambda}^{J}_{iL} = 0, \quad \overset{*}{\mathcal{N}}{}^{\beta}_{J}\tilde{\mathcal{N}}^{J}_{\alpha L} = 0, \tag{10}$$

то, свернув (8) с $\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}$, а (9) с $\overset{*}{\mathcal{N}}{}^{\alpha}_{J}$, получим

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jK} = -\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}\left(\Lambda^{J}_{jK} - \Lambda^{L}_{j}\Gamma^{J}_{LK}\right), \tag{11}$$

$$\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta K} = -\overset{*}{\mathcal{N}}{}^{\alpha}_{J}\left(\mathcal{N}^{J}_{\beta K} - \mathcal{N}^{L}_{\beta}\Gamma^{J}_{LK}\right). \tag{12}$$

По аналогии с геометрией поверхности (см.[3]) связность $\overset{\circ}{\gamma}$, определенную на распределении Λ объектом $\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jK}$, будем называть горизонтальной связностью, а связность $\overset{*}{\gamma}$, определенную на нормально-оснащающем распределении $\mathcal{N}$ объектом $\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta L}$, -вертикальной связностью. На $M_n(F)$ проведем следующую канонизацию:

$$\Lambda^{J}_{i} = \delta^{J}_{i}, \quad \mathcal{N}^{J}_{\alpha} = \delta^{J}_{\alpha}, \quad \Lambda^{K}_{iL} = 0, \quad \mathcal{N}^{\alpha}_{\beta L} = 0. \tag{13}$$

В силу леммы Н.М.Остиану [2], такая канонизация возможна. При этом $\vec{\Lambda}_i = \vec{e}_i$, $\vec{\mathcal{N}}_\alpha = \vec{e}_\alpha$, а, следовательно, репер адаптирован паре распределений Λ и $\mathcal{N}$. Обозначим его через $R'(\Lambda,\mathcal{N})$. В репере $R'(\Lambda,\mathcal{N})$ равенства (II), (I2) примут вид:

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^{K}_{iL} = \Gamma^{K}_{iL}, \quad \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta L} = \Gamma^{\alpha}_{\beta L}. \tag{14}$$

Следовательно, справедливо

Утверждение I. В многообразии M_n в адаптированном репере $R'(\Lambda,\mathcal{N})$ функции $\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jL}$ и $\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta L}$, определяющие горизонтальную $\overset{\circ}{\gamma}$ и вертикальную $\overset{*}{\gamma}$ связности [3], являются подобъектами объекта Γ^{J}_{KL}. При канонизации (I3) из уравнений (I), (3) следует

$$\theta^{i}_{j} = \omega^{i}_{j}, \quad \theta^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta}. \tag{15}$$

3. Известно [2], что если в многообразии $M_n(F)$ распределение Λ нормально оснащено полем $\mathcal{N}$, то на нем естественным образом индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура:

$$F\vec{\Lambda}_i = f^{K}_{i}\vec{\Lambda}_K + \eta^{\alpha}_{i}\vec{\mathcal{N}}_\alpha, \quad F\vec{\mathcal{N}}_\alpha = -\xi^{K}_{\alpha}\vec{\Lambda}_K + \rho^{\beta}_{\alpha}\vec{\mathcal{N}}_\beta. \tag{16}$$

Поля геометрических объектов $\{\eta^{\alpha}_{i}\}$, $\{\xi^{K}_{\alpha}\}$ определяют на $M_n(F)$ пару распределений (η), (ξ), являющихся подрасслоениями распределения Λ. В общем случае в каждой точке $x \in M_n$ справедливо

$$\dim(\eta)_x = 2m-n, \quad \dim(\xi)_x = n-m, \quad \Lambda_x = (\eta)_x \oplus (\xi)_x.$$

В репере $R'(\Lambda,\mathcal{N})$ дифференциальные уравнения геометрического объекта $\{\eta^{\alpha}_{i}\} = \{\eta^{p+\sigma}_{a}, \eta^{p+\sigma}_{\tau}\}$ $(a,b,\ldots = 1,\ldots,2m-n;\ \tau,\sigma,\ldots = \overline{2m-n+1,m})$ имеют вид:

$$d\eta^{p+\tau}_{a} - \eta^{p+\tau}_{b}\omega^{b}_{a} - \eta^{p+\tau}_{\sigma}\omega^{\sigma}_{a} + \eta^{p+\sigma}_{a}\omega^{p+\tau}_{p+\sigma} = \eta^{p+\tau}_{aL}\omega^{L}, \tag{17}$$

$$d\eta^{p+\tau}_{\sigma} - \eta^{p+\tau}_{\rho}\omega^{\rho}_{\sigma} - \eta^{p+\tau}_{a}\omega^{a}_{\sigma} + \eta^{p+\varsigma}_{\sigma}\omega^{p+\tau}_{p+\varsigma} = \eta^{p+\tau}_{\sigma L}\omega^{L}. \tag{18}$$

Здесь для α введено обозначение $p+\sigma$ и $p = n-2m$. Проведем дальнейшую канонизацию репера $R'(\Lambda,\mathcal{N})$: $\eta^{p+\tau}_{\sigma} = \delta^{\tau}_{\sigma}$. При такой канонизации функции

$$H^{\sigma}_{a} \overset{def}{=} -\eta^{p+\sigma}_{a} \tag{19}$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dH^{\sigma}_{a} - H^{\sigma}_{b}\vartheta^{b}_{a} + H^{\tau}_{a}\omega^{\sigma}_{\tau} + \omega^{\sigma}_{a} = H^{\sigma}_{aL}\omega^{L}, \tag{20}$$

где формы $\vartheta^{b}_{a} = \omega^{b}_{a} + H^{\sigma}_{a}\omega^{b}_{\sigma}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\vartheta^{b}_{a} = \vartheta^{c}_{a} \wedge \vartheta^{b}_{c} + \omega^{L} \wedge \vartheta^{b}_{aL}. \tag{21}$$

Введем функции H^{i}_{a}, определив их следующим образом:

$$H^{i}_{a} = \{H^{\sigma}_{a} = -\eta^{p+\sigma}_{a},\ H^{b}_{a} = \delta^{b}_{a}\}. \tag{22}$$

Тогда, с учетом (22), из (20) получаем

$$dH^{i}_{a} - H^{i}_{b}\vartheta^{b}_{a} + H^{K}_{a}\omega^{i}_{K} = H^{i}_{aL}\omega^{L}. \tag{23}$$

Векторы $\vec{H}_a = H^i_a \vec{\Lambda}_i$ натягивают в каждой точке $x \in M_n$ элемент распределения η. Введем формы

$$\tilde{\vartheta}^a_b = \vartheta^a_b - \overset{1}{G}{}^a_{bL}\,\omega^L \qquad (24)$$

и потребуем, чтобы они удовлетворяли структурным уравнениям Картана-Лаптева. При выполнении этого требования функции $\overset{1}{G}{}^a_{bL}$ будут удовлетворять уравнениям вида (4) и определят Λ-виртуальную связность в распределении η. Подставляя (24) в (23), с учетом (I5), находим ковариантную производную [3] $\tilde{H}^i_{aL}$ связности $\overset{0}{\gamma}$, $\overset{1}{G}$:

$$\tilde{H}^i_{aL} = H^i_{aL} + H^i_b \overset{1}{G}{}^b_{aL} - H^k_a \overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}. \qquad (25)$$

Теперь рассмотрим распределения ξ, элементы которого в каждой точке $x \in M_n$ натянуты на векторы $\vec{\xi}_{p+\sigma} = \xi^i_{p+\sigma}\vec{\Lambda}_i$, где $\xi^i_{p+\sigma}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$d\xi^i_{p+\sigma} - \xi^i_{p+\tau}\,\omega^{p+\tau}_{p+\sigma} + \xi^k_{p+\sigma}\,\omega^i_k = \xi^i_{p+\sigma,L}\,\omega^L. \qquad (26)$$

Векторы $\vec{H}_a$, $\vec{\xi}_{p+\sigma}$ натягивают элемент Λ_x и поэтому $\det\left\|\begin{matrix} H^i_a \\ \xi^i_{p+\sigma}\end{matrix}\right\| \neq 0$, можно ввести обратную матрицу $\|\overset{*}{H}{}^a_i \; \overset{*}{\xi}{}^{p+\sigma}_i\|$

$$\begin{cases} H^i_a \overset{*}{H}{}^c_i = \delta^c_a, \; H^i_a \overset{*}{\xi}{}^{p+\sigma}_i = 0, \; \xi^i_{p+\sigma}\overset{*}{H}{}^a_i = 0, \\ \xi^i_{p+\sigma}\overset{*}{\xi}{}^{p+\tau}_i = \delta^\tau_\sigma, \; H^i_a \overset{*}{H}{}^a_k + \xi^i_{p+\sigma}\overset{*}{\xi}{}^{p+\sigma}_k = \delta^i_k. \end{cases} \qquad (27)$$

Введем формы

$$\tilde{\omega}^{p+\tau}_{p+\sigma} = \omega^{p+\tau}_{p+\sigma} - \overset{2}{G}{}^\tau_{\sigma L}\,\omega^L. \qquad (28)$$

Потребуем, чтобы они удовлетворяли структурным уравнениям Картана-Лаптева. При выполнении этого требования функции $\overset{2}{G}{}^\tau_{\sigma L}$ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям вида (5) и определят Λ-виртуальную связность в распределении ξ. С учетом (I5), (28) из дифференциальных уравнений (26) находим ковариантную производную $\tilde{\xi}^i_{p+\sigma,L}$ в связности $\overset{0}{\gamma}$, $\overset{2}{G}$:

$$\tilde{\xi}^i_{p+\sigma,L} = \xi^i_{p+\sigma,L} + \overset{2}{G}{}^\tau_{\sigma L}\,\xi^i_{p+\tau} - \xi^k_{p+\sigma}\overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}. \qquad (29)$$

4. Свернув равенства (25) с $\overset{*}{H}{}^b_i$, находим

$$\overset{*}{H}{}^b_i \tilde{H}^i_{aL} = \overset{*}{H}{}^b_i (H^i_{aL} - H^k_a \overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}) + \overset{1}{G}{}^b_{aL}, \qquad (30)$$

и, свернув равенства (29) с $\overset{*}{\xi}{}^{p+\rho}_i$, находим

$$\overset{*}{\xi}{}^{p+\rho}_i \tilde{\xi}^i_{p+\sigma,L} = \overset{*}{\xi}{}^{p+\rho}_i (\xi^i_{p+\sigma,L} - \xi^k_{p+\sigma}\overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}) + \overset{2}{G}{}^\rho_{\sigma L}. \qquad (3I)$$

Векторы $\vec{H}_a$, $\vec{\xi}_{p+\sigma}$ в текущем элементе распределения Λ образуют репер $R_1(H,\xi)$. Используя (25) и (29), введем векторы

$$\vec{H}_{aL} = \tilde{H}^i_{aL}\vec{\Lambda}_i = h^b_{aL}\vec{H}_b + h^{p+\tau}_{aL}\vec{\xi}_{p+\tau}, \qquad (32)$$

$$\vec{\xi}_{p+\sigma,L} = \tilde{\xi}^i_{p+\sigma,L}\vec{\Lambda}_i = \ell^{p+\tau}_{p+\sigma,L}\vec{\xi}_{p+\tau} + \ell^a_{p+\sigma,L}\vec{H}_a, \qquad (33)$$

где

$$h^b_{aL} = \overset{*}{H}{}^b_i (H^i_{aL} - H^k_a \overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}) + \overset{1}{G}{}^b_{aL}, \qquad (34)$$

$$\ell^{p+\tau}_{p+\sigma,L} = \overset{*}{\xi}{}^{p+\tau}_i (\xi^i_{p+\sigma,L} - \xi^k_{p+\sigma}\overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}) + \overset{2}{G}{}^\tau_{\sigma L}. \qquad (35)$$

Если потребовать, чтобы $h^b_{aL} = 0$, $\ell^{p+\tau}_{p+\sigma,L} = 0$, то из уравнений (34), (35) находим охват объектов $\overset{1}{G}{}^b_{aL}$ и $\overset{2}{G}{}^\sigma_{\tau L}$. Введя для них обозначения $\overset{1}{G} \overset{def}{=} \overset{0}{G}$ и $\overset{2}{G} \overset{def}{=} \overset{*}{G}$, получим

$$\overset{0}{G}{}^b_{aL} = -\overset{*}{H}{}^b_i (H^i_{aL} - H^k_a \overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}), \qquad (36)$$

$$\overset{*}{G}{}^\tau_{\sigma L} = -\overset{*}{\xi}{}^{p+\tau}_i (\xi^i_{p+\sigma,L} - \xi^k_{p+\sigma}\overset{0}{\gamma}{}^i_{kL}). \qquad (37)$$

Назовем эти объекты соответственно Λ-виртуальной индуцированной и Λ-виртуальной связностями. Теперь канонизируем Λ-виртуальный репер $R_1(H,\xi)$ таким образом:

$$H^\sigma_a = 0, \; \xi^a_{p+\sigma} = 0, \; H^a_{bL} = 0. \qquad (38)$$

Тогда из дифференциальных уравнений (20) и (26) следует

$$\omega^\sigma_a = H^\sigma_{aL}\,\omega^L, \; \omega^a_\sigma = \tilde{\xi}^{p+\tau}_\sigma\,\xi^a_{p+\tau,L}\,\omega^L, \qquad (39)$$

где $\tilde{\xi}^{p+\tau}_\sigma \xi^\rho_{p+\tau} = \delta^\rho_\sigma$. В адаптированном репере $R_1(H,\xi)$ справедливо:

$$\overset{0}{G}{}^a_{bL} = \overset{0}{\gamma}{}^a_{bL}, \; \overset{*}{G}{}^\tau_{\sigma L} = \overset{0}{\gamma}{}^\tau_{\sigma L} + \eta^{p+\tau}_{\sigma L}. \qquad (40)$$

У т в е р ж д е н и е 2. В адаптированном Λ-виртуальном репере $R_1(H,\xi)$ объект $\overset{0}{G}{}^a_{bL}$ является подобъектом объекта горизонтальной связности $\overset{0}{\gamma}$ в распределении Λ.

Библиографический список

I. А к м а т о в Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m-мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n // ВИНИТИ. М., 1983. 34с. Деп. в ВИНИТИ 25.5.1983.

2. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях // Проблемы геом. ВИНИТИ. М., 1975. Т.7.

3. О с т и а н у Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности два в контактном и почти контактном многообразиях // Проблемы геом. / ВИНИТИ. М., 1981. Т. I3. С. 27-76.