3. *Попов Ю.И.* Регулярные гиперполосы $H_m(\Delta)$ аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1998. Деп. в ВИНИТИ 16.11.98, №3341-В98.

4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. С. 49 – 94.

5. *Попов Ю.И.* Общая теория гиперполос аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1998. Деп. в ВИНИТИ 16.11.98, №3342-В98.

Yu. Popov

INVARIANT EQUIPMENTS OF HYPERSTRIP $H_m(\Delta)$

Special class of regular hyperstrip $H_m(\Delta)$, equipped by (r+1)-dimensional planes Δ, is considered. The giving for the hyperstrip is produced and existence theorem is adduced. It is shown, in differential neighbourhood of order t, where t – order for field of TΛ-virtual normals of the 1-st kind , to the hyperstrip $H_m(\Delta)$ one can join: bunch of Cartan`s planes, bunch of normals of the 2-nd kind for characteristics distribution, and in neighbourhood of order t+1 – normalisation for hyperstrip in the Norden-Timofeev`s sence.

УДК 514.75

А.В. Скрягина

(Калининградский государственный университет)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОСНАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В проективном пространстве P_n плоскостная m-поверхность рассмотрена как семейство M_r пар образующей L_h и ее 1-й дифференциальной окрестности T_{m+hr}. Произведено композиционное оснащение плоскостной поверхности, состоящее в задании полей обобщенной нормали 2-го рода $P_{r(h+1)-1}$, дополняющей образующую L_h до касательного пространства T_{m+hr}, и обобщенной плоскости Картана $P_{n-m-hr-1}$, дополняющей касательное пространство T_{m+hr} до объемлющего P_n. Это оснащение индуцирует в ассоциированном расслоении пучки связностей 1-го и 2-го типов. Найдены и геометрически охарактеризованы условия их совпадения. Введены и использованы специальные случаи обобщенных нормализации 2-го рода и оснащения Картана.

Продолжим изучение плоскостной поверхности S_m, представленной как r-мерное многообразие M_r пар плоскостей (L_h, T_{m+hr}). Оснащающие плоскости $P_{r(h+1)-1}$, $P_{n-m-hr-1}$ задаются совокупностями точек:

$$B_p = A_p + \lambda_p^a A_a + \lambda_p A,\ B_\sigma = A_\sigma + \lambda_\sigma^a A_a + \lambda_\sigma^p A_p + \lambda_\sigma A;$$

$$(a,... = \overline{1,h};\ \ p,... = \overline{h+1, m+hr};\ \ \sigma,... = \overline{m+hr+1, n};\ \ i = \overline{h+1, h+r}).$$

Композиционное оснащение плоскостной поверхности определяется полем квазитензора $\lambda=(\lambda_p^a,\lambda_p,\lambda_\sigma^a,\lambda_\sigma^p,\lambda_\sigma)$ на базе M_r. Внося формы связности в дифференциальные уравнения компонент квазитензора λ, получим

$$\nabla\lambda_p^a=\nabla_i\lambda_p^a\theta^i,\quad \nabla\lambda_p=\nabla_i\lambda_p\theta^i,\quad \nabla\lambda_\sigma^a=\nabla_i\lambda_\sigma^a\theta^i,\quad \nabla\lambda_\sigma^p=\nabla_i\lambda_\sigma^p\theta^i,\quad \nabla\lambda_\sigma=\nabla_i\lambda_\sigma\theta^i,\qquad(1)$$

где слева стоят ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора λ [1], а справа – коэффициенты при базисных формах – ковариантные производные, выражающиеся через компоненты объекта групповой связности $\Gamma=\{\Gamma_{ai},\Gamma_i^a,\Gamma_{bi}^a,\Gamma_{qi}^p,\Gamma_{pi}^a,\Gamma_{pi},\Gamma_{\tau i}^\sigma,\Gamma_{\sigma i}^a,\Gamma_{\sigma i}^p,\Gamma_{\sigma i}\}$ по формулам:

$$\nabla_i\lambda_p^a=\lambda_{pi}^a-\lambda_q^a\Gamma_{pi}^q-\lambda_p^b\Gamma_{bi}^a-\lambda_p\Gamma_i^a-\Gamma_{pi}^a,\quad \nabla_i\lambda_p=\lambda_{pi}+\lambda_q\Gamma_{pi}^q-\lambda_p^a\Gamma_{ai}-\Gamma_{pi},$$
$$\nabla_i\lambda_\sigma^a=\lambda_{\sigma i}^a+\lambda_\tau^a\Gamma_{\sigma i}^\tau-\lambda_\sigma^b\Gamma_{bi}^a-\lambda_\sigma^p\Gamma_{pi}^a-\lambda_\sigma\Gamma_i^a-\Gamma_{\sigma i}^a,\qquad(2)$$
$$\nabla_i\lambda_\sigma^p=\lambda_{\sigma i}^p+\lambda_\tau^p\Gamma_{\sigma i}^\tau-\lambda_\sigma^q\Gamma_{qi}^p-\Gamma_{\sigma i}^p,\quad \nabla_i\lambda_\sigma=\lambda_{\sigma i}+\lambda_\tau\Gamma_{\sigma i}^\tau-\lambda_\sigma^a\Gamma_{ai}-\lambda_\sigma^p\Gamma_{pi}-\Gamma_{\sigma i}.$$

Они удовлетворяют дифференциальным сравнениям [1], позволяющим положить $\nabla_i\lambda_p^a=0,\ \nabla_i\lambda_p=0,\ \nabla_i\lambda_\sigma^a=0,\ \nabla_i\lambda_\sigma^p=0,\ \nabla_i\lambda_\sigma=0$ в формулах (2) и получить следующие соотношения:

$$\overset{2}{\Gamma}{}_{pi}^a=\lambda_{pi}^a+\lambda_q^a\Gamma_{pi}^q-\lambda_p^b\Gamma_{bi}^a-\lambda_p\Gamma_i^a,\quad \overset{2}{\Gamma}{}_{pi}=\lambda_{pi}+\lambda_q\Gamma_{pi}^q-\lambda_p^a\Gamma_{ai},$$
$$\overset{2}{\Gamma}{}_{\sigma i}=\lambda_{\sigma i}-\lambda_\sigma^p\lambda_{pi}+\Gamma_{\sigma i}^\tau\lambda_\tau-\lambda_\sigma^p\lambda_q\Gamma_{pi}^q+\Gamma_{ai}(\lambda_\sigma^p\lambda_p^a-\lambda_\sigma^a),\ \overset{2}{\Gamma}{}_{\sigma i}^p=\lambda_{\sigma i}^p+\lambda_\tau^p\Gamma_{\sigma i}^\tau-\lambda_\sigma^q\Gamma_{qi}^p,\qquad(3)$$
$$\overset{2}{\Gamma}{}_{\sigma i}^a=\lambda_{\sigma i}^a-\lambda_\sigma^p\lambda_{pi}^a+\lambda_\tau^a\Gamma_{\sigma i}^\tau+\Gamma_{bi}^a(\lambda_\sigma^p\lambda_p^b-\lambda_\sigma^b)-\lambda_\sigma^p\lambda_q^a\Gamma_{pi}^q+\Gamma_i^a(\lambda_\sigma^p\lambda_p-\lambda_\sigma),$$

где символ «2» над компонентами объекта связности Г обозначает принадлежность связности пучку 2-го типа. Дадим

Определение 1. Пучком связностей 2-го типа назовем множество групповых связностей, определяемых объектом $\overset{2}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям (3), причем компоненты подобъекта $\Gamma_1=\{\Gamma_{ai},\Gamma_i^a,\Gamma_{bi}^a,\Gamma_{qi}^p,\Gamma_{\tau i}^\sigma\}$ являются параметрами пучка.

Теорема 1. *Композиционное оснащение плоскостной поверхности M_r полями плоскостей $P_{r(h+1)-1}$, $P_{n-m-hr-1}$ индуцирует в расслоении $G(M_r)$ пучок групповых связностей 2-го типа.*

В пучке групповых связностей 2-го типа можно выделить единственную связность. Охваты параметров пучка найдены в работе [1], а остальные компоненты объекта связности определяются соотношениями (3), в которые подставлены охваты параметров. Таким образом, связность 2-го типа задается объектом $\overset{02}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}_i^a,\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a,\overset{0}{\Gamma}{}_{ai},\overset{0}{\Gamma}{}_{qi}^p,\overset{0}{\Gamma}{}_{\tau i}^\sigma,\overset{02}{\Gamma}{}_{pi}^a,\overset{02}{\Gamma}{}_{\sigma i}^p,\overset{02}{\Gamma}{}_{\sigma i},\overset{02}{\Gamma}{}_{\sigma i}^a,\overset{02}{\Gamma}{}_{pi}\}$, где символ «02» означает, что из пучка 2-го типа выделена связность путем охвата совокупности параметров Γ_1, которая в этом случае обозначена через $\overset{0}{\Gamma}_1$.

Запишем дифференциалы точек B_p, B_σ, подставляя вместо дифференциалов компонент оснащающего квазитензора λ их выражения через ковариантные дифференциалы с учетом (3):

$$dB_p = (...)_p^q B_q + \Lambda_{pi}^\sigma \theta^i B_\sigma + (\overset{2}{\nabla} \lambda_p^a + t_{pi}^a \theta^i) A_a + (\overset{2}{\nabla} \lambda_p + t_{pi}\theta^i) A,$$
$$dB_\sigma = (...)_\sigma^\tau B_\tau + (\overset{2}{\nabla} \lambda_\sigma^p + t_{\sigma i}^p \theta^i) B_p + (\Omega_\sigma^a + T_{\sigma i}^a \theta^i) A_a + (\Omega_\sigma + T_{\sigma i}\theta^i) A, \tag{4}$$

где

$$t_{\sigma i}^p = \lambda_{\sigma i}^p - \lambda_\sigma^q \Lambda_{qi}^\tau \lambda_\tau^p + \lambda_\sigma^a \Lambda_{ai}^p + \lambda_\sigma \Lambda_i^p, \quad t_{\sigma i} = \lambda_{\sigma i} - \lambda_\sigma^p \Lambda_{pi}^\tau \lambda_\tau,$$
$$t_{\sigma i}^a = \lambda_{\sigma i}^a - \lambda_\sigma^p \Lambda_{pi}^\tau \lambda_\tau^a, \quad t_{pi}^a = \lambda_{pi}^a - \lambda_\sigma^a \Lambda_{pi}^\sigma + \lambda_\sigma^q \Lambda_{pi}^\sigma \lambda_q^a - \lambda_p^b \lambda_q^a \Lambda_{bi}^q - \lambda_p \lambda_q^a \Lambda_i^q, \tag{5}$$
$$t_{pi} = \lambda_{pi} + \lambda_q \lambda_\sigma^q \Lambda_{pi}^\sigma - \lambda_\sigma \Lambda_{pi}^\sigma - \lambda_p^a \lambda_q \Lambda_{ai}^q - \lambda_p \lambda_q \Lambda_i^q,$$
$$T_{\sigma i}^a = t_{\sigma i}^a - \lambda_p^a t_{\sigma i}^p, \quad T_{\sigma i} = t_{\sigma i} - \lambda_p t_{\sigma i}^p, \tag{6}$$
$$\Omega_\sigma^a = \nabla \lambda_\sigma^a - \lambda_p^a \nabla \lambda_\sigma^p, \quad \Omega_\sigma = \nabla \lambda_\sigma - \lambda_p \nabla \lambda_\sigma^p. \tag{7}$$

Дифференцируя величины (5), получим

$$\Delta t_{\sigma i}^p \equiv 0, \quad \Delta t_{\sigma i} + t_{\sigma i}^p \omega_p + t_{\sigma i}^a \omega_a \equiv 0,$$
$$\Delta t_{\sigma i}^a + t_{\sigma i}^p \omega_p^a + t_{\sigma i} \omega^a \equiv 0, \quad \Delta t_{pi}^a + t_{pi} \omega^a \equiv 0, \quad \Delta t_{pi} + t_{pi}^a \omega_a \equiv 0, \tag{8}$$

т.е. объект $t = \{t_{\sigma i}^p, t_{\sigma i}, t_{\sigma i}^a, t_{pi}^a, t_{pi}\}$, компоненты которого удовлетворяют сравнениям (8), является тензором, содержащим три простых [2] подтензора $\{t_{\sigma i}^p\}$, $\{t_{pi}^a, t_{pi}\}$, $\{t_{\sigma i}^a, t_{\sigma i}, t_{\sigma i}^p\}$. Компоненты объекта $T = \{T_{\sigma i}^a, T_{\sigma i}\}$ удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\Delta T_{\sigma i} + T_{\sigma i}^a \omega_a \equiv 0, \quad \Delta T_{\sigma i}^a + T_{\sigma i} \omega^a \equiv 0,$$

т.е. объект T является тензором.

Определение 2. Композиционное оснащение назовем специальным, если тензор t равен нулю, т.е.

$$t_{\sigma i} = 0, \quad t_{pi} = 0, \quad t_{\sigma i}^p = 0, \quad t_{\sigma i}^a = 0, \quad t_{pi}^a = 0. \tag{9}$$

Обобщенную нормализацию 2-го рода, задаваемую полем плоскостей $P_{r(h+1)-1}$, назовем специальной, если выполняются равенства: $t_{pi} = 0, \quad t_{pi}^a = 0.$

Обобщенное оснащение Картана, задаваемое полем плоскостей $P_{n-m-hr-1}$, называется: 1) специальным – в случае $t_{\sigma i} = 0, \quad t_{\sigma i}^a = 0, \quad t_{\sigma i}^p = 0;$ 2) полуспециальным – в случае $t_{\sigma i}^p = 0;$ 3) комбинационным – в случае $T_{\sigma i}^a = 0, \quad T_{\sigma i} = 0.$

Замечание. Специальность обобщенного оснащения Картана равносильна его полуспециальности и комбинационности.

Из формул (4) и определения 2 вытекают следующие утверждения.

Теорема 2. *В случае неспециальной обобщенной нормализации 2-го рода* $(t_{pi} \neq 0, \quad t_{pi}^a \neq 0)$ *оснащающая плоскость* $P_{r(h+1)-1}$ *переносится параллельно в подсвязности* $\overset{02}{\Gamma}_2 = \{\overset{0}{\Gamma}_0, \overset{0}{\Gamma}{}_{qi}^p, \overset{02}{\Gamma}_{pi}, \overset{02}{\Gamma}{}_{pi}^a\}$ *при любом смещении, т.е. параллельное перенесение свободно вырожденное.*

Теорема 3. *В случае специальной обобщенной нормализации 2-го рода* $(t_{pi}=0,\quad t^a_{pi}=0)$ *оснащающая плоскость $P_{r(h+1)-1}$ переносится параллельно в подсвязности* $\overset{02}{\Gamma}_2$ *лишь тогда, когда она смещается в плоскости Бортолотти P_{n-h-1}.*

Теорема 4. *В случае неполуспециального и некомбинационного обобщенного оснащения Картана оснащающая плоскость $P_{n-m-hr-1}$ переносится параллельно в псевдосвязности* $\overset{02}{\gamma}_3=\{\overset{0}{\Gamma}{}^p_{qi},\overset{0}{\Gamma}{}^\tau_{\sigma i},\overset{02}{\Gamma}{}^p_{\sigma i}\}$ *и в линейной комбинации групповой связности* $\overset{02}{\Gamma}$*, определяемой формами (7), при любом смещении.*

Теорема 5. *В случае комбинационного обобщенного оснащения Картана (T=0) оснащающая плоскость $P_{n-m-hr-1}$ переносится параллельно в комбинации групповой связности* $\overset{02}{\Gamma}$*, определяемой формами (7), лишь тогда, когда она смещается в плоскости Бортолотти P_{n-h-1}.*

Теорема 6. *В случае полуспециального обобщенного оснащения Картана* $(t^p_{\sigma i}=0)$ *оснащающая плоскость $P_{n-m-hr-1}$ переносится параллельно в псевдосвязности* $\overset{02}{\gamma}_3$ *лишь тогда, когда она смещается в обобщенной нормали 1-го рода $P_{n-m-h(r-1)}$.*

Следствие (к теоремам 4, 5). Если обобщенное оснащение Картана специальное, то оснащающая плоскость $P_{n-m-hr-1}$ переносится параллельно в групповой связности $\overset{02}{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда она неподвижна, т.е. параллельное перенесение – связанно вырожденное.

Пучок 1-го типа [1; 3] совпадает с пучком 2-го типа, если выполняются соотношения:

$$\lambda^p_{\sigma i}=\lambda^q_\sigma\Lambda^\tau_{qi}\lambda^p_\tau-\lambda^a_\sigma\Lambda^p_{ai}-\lambda_\sigma\Lambda^p_i,\quad \lambda_{\sigma i}=\lambda^p_\sigma\Lambda^\tau_{pi}\lambda_\tau,$$
$$\lambda^a_{\sigma i}=\lambda^p_\sigma\Lambda^\tau_{pi}\lambda^a_\tau,\quad \lambda^a_{pi}=\lambda^a_\sigma\Lambda^\sigma_{pi}-\lambda^q_\sigma\lambda^a_q\Lambda^\sigma_{pi}+\lambda^b_p\lambda^a_q\Lambda^q_{bi}+\lambda_p\lambda^a_q\Lambda^q_i,$$
$$\lambda_{pi}=-\lambda_q\lambda^q_\sigma\Lambda^\sigma_{pi}+\lambda_\sigma\Lambda^\sigma_{pi}+\lambda^a_p\lambda_q\Lambda^q_{ai}+\lambda_p\lambda_q\Lambda^q_i,$$

которые дают подробную запись соотношений (9). Поэтому справедлива

Теорема 7. *Пучки групповых связностей 1-го и 2-го типов совпадают лишь тогда, когда композиционное оснащение специальное, т.е. обобщенная плоскость Картана $P_{n-m-hr-1}$ и плоскость Бортолотти P_{n-h-1}, содержащая обобщенную нормаль 2-го рода $P_{r(h+1)-1}$, неподвижны.*

*Доказательство***.** Покажем справедливость утверждения при условии (9). Дифференциалы точек B_p и B_σ можно представить в виде:

$$dB_p=(...)^q_pB_q+\Lambda^\sigma_{pi}\theta^iB_\sigma+t^a_{pi}\theta^iA_a+t_{pi}\theta^iA,\quad dB_\sigma=(...)^\tau_\sigma B_\tau+t^p_{\sigma i}\theta^iB_p+T^a_{\sigma i}\theta^iA_a+T_{\sigma i}\theta^iA.$$

Плоскости $P_{n-m-hr-1}=[B_\sigma]$ и $P_{n-h-1}=[B_p,B_\sigma]$ неподвижны тогда и только тогда, когда $t^a_{pi}=0,\quad t_{pi}=0,\quad t^p_{\sigma i}=0,\ T^a_{\sigma i}=0,\quad T_{\sigma i}=0,$ а эти равенства с учетом замечания эквивалентны равенствам (9).

Список литературы

1. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа на плоскостной поверхности как семействе пар образующей и ее первой дифференциальной окрестности // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2001. С. 25 – 28.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа на плоскостной поверхности // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2001. Т. 12. С. 58 – 59.

A. Skriagina

SPECIAL EQUIPMENT OF PLANE SURFACE

The plane m-surface as a family M_r of couples of generator L_h and it's first differential neighborhood T_{m+hr} is considered in the projective space P_n. Composition equipment of plane surface is made (i.e. generelized normal of the 2-st genus $P_{r(h+1)-1}$: $L_h \oplus P_{r(h+1)-1}=T_{m+hr}$ and generelized Cartan's plane $P_{n-m-hr-1}$: $T_{m+hr} P_{n-m-hr-1}=P_n$). It is schown,that the equipment of the surface induces in the associated bundle the bunches of the first and second types. A geometric characteristic of their coincidence is found. Special cases generelized normalization second genus and Cartan's equipment are defined and used.

УДК 514.756.2

А.В. Столяров

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

НОРМАЛИЗОВАННОЕ КОНФОРМНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Изучаются конформные и аффинные связности, индуцируемые невырожденной нормализацией n-мерного собственно конформного пространства C_n.

Индексы принимают следующие значения: $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}$; $i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}$.

1. Рассмотрим собственно конформное пространство C_n; отнесем его к подвижному полуизотропному [3] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_i, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [1; 2]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}, \tag{1}$$

причем в собственно конформном пространстве C_n матрица $\|g_{\lambda\mu}\|$ является невырожденной и положительно определенной. Любую гиперсферу $P \in C_n$ можно представить в виде линейной комбинации элементов репера:

$$P = x^0 A_0 + x^i A_i + x^{n+1} A_{n+1}.$$