Список литературы

1. *Елисеева Н.А.* Н(П)-распределения проективного пространства. Калининград, 2002. Деп. в ВИНИТИ РАН, №206-В2002.
2. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. Vol. 3. P. 81—89.
3. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. 1975. Т. 7. С. 117—151.
4. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: монография. 2-е изд. Чебоксары, 1994.

N. Eliseeva

THE EQUIPMENTS IN E. BORTOLOTTI'S SENSE
OF M-SUBBUNDLES OF STRIP DISTRIBUTION

For M-subbundles of Н(П)-distribution the equipments in E. Bortolotti's sense are constructed.

УДК 514.756.2

Т. В. Зверева

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары)

О ПРОСТРАНСТВЕ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ НА КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Получено пространство конформной связности $C_{m,m}$ без кручения, индуцируемое касательным оснащением полем m-сфер $[P_\alpha]$ многомерной поверхности V_m конформного пространства C_n.

Ключевые слова: конформное пространство, оснащение поверхности, связность.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$I, J, K = \overline{1,n};\ \lambda, \mu = \overline{0,n+1};\ \alpha, \beta = \overline{m+1,n};\ u, v = \overline{m+1,n-1};$$
$$i, j, k = \overline{1,m};\ a, b = \overline{0,m}, n+1.$$

Рассмотрим конформное пространство C_n, отнесенное к полуизотропному реперу $R = \{A_0, A_I, A_{n+1}\}$ [3]. Инфинитезимальные перемещения репера $\{A_\lambda\}$ определяются уравнениями $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют структурным уравнениям конформного пространства C_n [4; 5]. Геометрически отнесение конформного пространства C_n к полуизотропному реперу *R* означает, что вершины A_0, A_{n+1} репера принадлежат гиперквадрике Дарбу Q_n^2 проективного пространства P_{n+1}, а вершины A_I лежат на пересечении касательных гиперплоскостей к Q_n^2 в точках A_0, A_{n+1}. При такой специализации репера уравнение гиперквадрики Дарбу имеет вид [4; 5]:

$$g_{IK} x^I x^K + 2x^0 x^{n+1} = 0. \tag{1}$$

В полуизотропном репере, согласно [4; 5], справедливы соотношения

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0,$$
$$\omega_I^{n+1} + g_{IK}\omega_0^K = 0,\ \omega_I^0 + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0,$$
$$dg_{IJ} - g_{IK}\omega_J^K - g_{KJ}\omega_I^K = 0.$$

Отметим, что в силу овальности гиперквадрики (1) тензор g_{IJ} невырожден:

$$g_{IK} g^{KJ} = \delta_I^J,\ dg^{IJ} + g^{IK}\omega_K^J + g^{KJ}\omega_K^I = 0.$$

На гиперквадрике Дарбу Q_n^2 проективного пространства P_{n+1} возьмем поверхность $\widetilde{V}_m$ $(m < n-1)$, описываемую точкой $A_0 \in Q_n^2$. Прообразом поверхности $\widetilde{V}_m \subset Q_n^2$ при отображении Дарбу является поверхность V_m конформного пространства C_n.

Дифференциальные уравнения m-мерной поверхности $V_m \subset C_n$ в репере 1-го порядка имеют вид $\omega_0^\alpha = 0$, результат продолжения последних уравнений есть $\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j$, $\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0$.

По аналогии с работой [6] гиперполосой H_m в n-мерном конформном пространстве C_n ($m < n-1$) назовем поверхность V_m, оснащенную m-параметрическим семейством касательных (n-1)-мерных линейных элементов (A_0, L_{n-1}): $A_0 \in T_m \subset L_{n-1}$ (где T_m — касательная плоскость к V_m в точке A_0); при этом поверхность V_m называется базисной. Зададим элемент L_{n-1} точкой A_0, гиперсферами $A_i \in T_m$ и (n-m-1) гиперсферами P_v, то есть $L_{n-1} \equiv \left[A_0, A_i, P_v\right]$, где $P_v = x_v^0 A_0 + A_v$.

Известно [7], что в этом случае с m-мерной поверхностью V_m ($m < n$ — 1) n-мерного конформного пространства C_n инвариантным образом ассоциируется m-мерная гиперполоса кривизны H_m, для которой исходная поверхность является базисной; при этом в полуизотропном полуортогональном репере 1-го порядка гиперполоса $H_m \subset C_n$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_0^\alpha = \omega_u^n = \omega_n^u = 0,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j,$$

где

$$\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0,\ \Lambda_{u[j}^k \Lambda_{i]k}^n = 0,\ \Lambda_{n[j}^k \Lambda_{i]k}^u = 0,\ g_{is}\Lambda_{\alpha j}^s + g_{\alpha\beta}\Lambda_{ij}^\beta = 0. \quad (2)$$

Пусть поверхность $V_m \subset C_n$ оснащена полем касательных m-сфер $[P_\alpha]$, где

$$P_\alpha = x_\alpha^0 A_0 + A_\alpha,$$

определяемым полем квазитензора $\{ x^0_\alpha \}$:

$$dx^0_\alpha + x^0_\alpha \omega^0_0 - x^0_\beta \omega^\beta_\alpha + \omega^0_\alpha = x^0_{\alpha j} \omega^j_0 .$$

Такое оснащение эквивалентно тому, что в пространстве C_n задано дифференцируемое соответствие $A_0 \to X''_{n+1}$, где точка X''_{n+1} имеет разложение:

$$X''_{n+1} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} x^0_\alpha x^0_\beta A_0 - g^{\alpha\beta} x^0_\beta P_\alpha + A_{n+1} ;$$

при этом точки A_0, X''_{n+1} и проходящие через них гиперсферы A_i, P_α образуют конформный полуортогональный репер $R'' = \{ A_0, A_i, P_\alpha, X''_{n+1} \}$.

Возьмем систему из $(m+2)^2$ форм Пфаффа $\{\Omega^a_b\}$, где

$$\begin{aligned}
&\Omega^j_0 = \omega^j_0 ,\ \Omega^0_0 = \omega^0_0 ,\ \Omega^0_0 + \Omega^{n+1}_{n+1} = 0, \\
&\Omega^0_i = \omega^0_i - x^0_\alpha \omega^\alpha_i - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} x^0_\alpha x^0_\beta \omega^{n+1}_i , \\
&\Omega^j_{n+1} = -g^{jk} \Omega^0_k ,\ \Omega^{n+1}_i = \omega^{n+1}_i = -g_{ik} \Omega^k_0 , \\
&\Omega^j_i = \omega^j_i ,\ \Omega^{n+1}_0 = \omega^{n+1}_0 = 0,\ \Omega^0_{n+1} = \omega^0_{n+1} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Система форм (3) удовлетворяет структурным уравнениям пространства конформной связности [8] $C_{m,m}$ с m-мерной базой V_m и m-мерными слоями, являющимися конформными пространствами $C_m(u^i) \equiv C_m(u)$:

$$\begin{cases}
D\Omega^j_0 = \Omega^k_0 \wedge (\Omega^j_k - \delta^j_k \Omega^0_0), \\
D\Omega^a_b = \Omega^c_b \wedge \Omega^a_c + \dfrac{1}{2} R^a_{bst} \Omega^s_0 \wedge \Omega^t_0 ,
\end{cases} \tag{4}$$

где совокупность функций $\{R^a_{bst}\}$ есть тензор кривизны-кручения пространства $C_{m,m}$:

$$dR^a_{bst} + 2R^a_{bst}\Omega^0_0 - R^a_{cst}\Omega^c_b - R^a_{bkt}\Omega^k_s - R^a_{bsk}\Omega^k_t + R^c_{bst}\Omega^a_c = R^a_{bstk}\Omega^k_0 .$$

В структурных уравнениях (4) компоненты тензора кривизны-кручения R^a_{bst} пространства $C_{m,m}$ в силу соотношений (3), (4) имеют следующее строение:

$$R^0_{0st}=R^{n+1}_{n+1st}=R^{n+1}_{ist}=R^j_{0st}=R^{n+1}_{0st}=R^0_{n+1st}=0,$$

$$R^j_{ist}=2(\Lambda^\alpha_{i[s}\Lambda^j_{|\alpha|t]}+x^0_\alpha\Lambda^\alpha_{i[s}\delta^j_{t]}-g^{\alpha\beta}x^0_\alpha x^0_\beta g_{i[s}\delta^j_{t]}-g^{\alpha\beta}x^0_\beta g_{i[s}\Lambda^j_{|\alpha|t]}),\quad(5)$$

$$R^0_{ist}=2(g^{\alpha\beta}x^0_\beta x^0_{\alpha[s}g_{t]i}-x^0_{\alpha[s}\Lambda^\alpha_{t]i}),$$

причем

$$R^j_{n+1st}=-g^{jk}R^0_{kst},\ g_{ik}R^k_{jst}+g_{jk}R^k_{ist}=0\,.$$

Замыкая уравнения

$$D\Omega^j_0=\Omega^0_0\wedge\Omega^j_0+\Omega^k_0\wedge\Omega^j_k$$

(см. (4)), получим $R^j_{(kst)}=0$. Аналогично, в силу $R^0_{0st}=0$, $R^{n+1}_{ist}=0$ (см. (5)) из структурных уравнений (4) найдем:

$$R^0_{(kst)}=0\,,\ R^p_{i(st}g_{k)p}=0\,.$$

Таким образом, имеем:

$$R^j_{(kst)}=0\,,\ R^0_{(kst)}=0\,,\ R^p_{i(st}g_{k)p}=0\,.\quad(6)$$

Соотношения (6) представляют собой аналоги тождеств Риччи пространства $C_{m,m}$ без кручения.

Система функций $\{R^j_{ist}\}$ образует тензор, при этом тензор $R_{is}\overset{def}{=}R^j_{isj}$ называется тензором Риччи [8] пространства $C_{m,m}$ без кручения. Согласно [8], в случае симметрии тензора R_{is} пространство $C_{m,m}$ назовем эквиконформным. Используя соотношения (5), найдем альтернированный тензор Риччи:

$$R_{[is]}=\Lambda^\alpha_{j[s}\Lambda^j_{|\alpha|i]}+x^0_\beta\Lambda^\beta_{[si]}\,;$$

из последних соотношений в силу (2) имеем: $R_{[is]}=0$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Инвариантное касательное оснащение поверхности V_m в конформном пространстве C_n полем т-сфер $[P_\alpha]$ индуцирует пространство конформной связности $C_{m,m}$ с полем метрического тензора g_{ij}, определяемое системой форм Пфаффа (3), причем компоненты тензора кривизны-кручения этого пространства имеют строения (5); при этом пространство $C_{m,m}$ является эквиконформным и имеют место аналоги тождеств Риччи (6).*

Рассмотрим в проективном пространстве P_{n+1} точку M, заданную в репере R своими координатами x^λ, то есть $\mathrm{M} = x^\lambda \mathrm{A}_\lambda$. Пусть эта же точка M в репере R'' имеет разложение

$$\mathrm{M} = y^0 \mathrm{A}_0 + y^i \mathrm{A}_i + y^\alpha \mathrm{P}_\alpha + y^{n+1} \mathrm{X}''_{n+1}.$$

«Старые» координаты x^λ точки M и ее «новые» координаты y^λ связаны соотношениями

$$\begin{cases} x^0 = y^0 + x^0_\alpha y^\alpha - \dfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} x^0_\alpha x^0_\beta y^{n+1}, \\ x^i = y^i, \quad x^\alpha = y^\alpha - g^{\alpha\beta} x^0_\beta y^{n+1}, \\ x^{n+1} = y^{n+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Так как в репере R'' система из $n-m$ уравнений $y^\alpha = 0$ определяет $(m+1)$-плоскость $[\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_i \mathrm{X}''_{n+1}] \subset \mathrm{P}_{n+1}$, то в репере R, согласно (7), ее уравнения имеют вид:

$$x^\alpha + g^{\alpha\beta} x^0_\beta x^{n+1} = 0. \tag{8}$$

Следовательно, при перенесении Дарбу точки фиксированного слоя $C_m(u)$ пространства $C_{m,m}$ отображаются в точки квадрики Дарбу Q^2_m, получающейся при пересечении $(m+1)$-плоскости $[\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_i \mathrm{X}''_{n+1}]$ с гиперквадрикой Дарбу Q^2_n.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Все точки каждого слоя пространства конформной связности $C_{m,m}$, индуцируемого касательным оснащением многомерной поверхности $V_m \subset C_n$ полем m-сфер $[P_\alpha]$, при перенесении Дарбу пространства C_n на проективное пространство P_{n+1} отображаются в точки квадрики Q_m^2, получающейся при пересечении гиперквадрики Дарбу Q_n^2 с полярой $(n-m-1)$-плоскости $[P_\alpha] \subset P_{n+1}$ относительно этой гиперквадрики.*

Пусть задано полное оснащение поверхности $V_m \subset C_n$, то есть кроме касательного оснащения полем m-сфер $[P_\alpha]$ задано ее нормальное оснащение полем (n-m)-сфер $[P_i]$,

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0,$$

определяемым полем квазитензора $\{x_i^0\}$:

$$dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{ij}^0\omega_0^j. \tag{9}$$

Уравнения (9) с использованием форм (3) примут вид:

$$dx_i^0 + x_i^0\Omega_0^0 - x_j^0\Omega_i^j + \Omega_i^0 = \tilde{x}_{ij}^0\Omega_0^j.$$

Следовательно, задание поля квазитензора x_i^0 на касательно оснащенной поверхности $V_m \subset C_n$ определяет нормализацию [9] пространства конформной связности $C_{m,m}$. Доказана

Теорема 3. *Инвариантное полное оснащение m-мерной поверхности V_m конформного пространства C_n полями квазитензоров x_i^0, x_α^0 индуцирует нормализованное пространство конформной связности $C_{m,m}$, определяемое полями m-сфер $[P_\alpha]$ и (n-m)-сфер $[P_i]$, задаваемыми соответственно полями квазитензоров x_α^0, x_i^0.*

Список литературы

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М., 1948.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. Казань, 1972.

4. *Акивис М.А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сб. М., 1961. Т. 53, №1. С. 53—72.

5. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

6. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. Вып. 8. М., 1950. С. 197—272.

7. *Зверева Т.В.* Гиперполоса, ассоциированная с m-мерной поверхностью конформного пространства // Актуальные проблемы современной науки: труды Х-й Международной конференции молодых ученых и студентов. Естественные науки. Ч. 1, 2: Математика. Математическое моделирование. Самара, 2009. С. 28—32.

8. *Столяров А.В.* Пространство конформной связности // Изв. вузов. Математика. 2006. №11. С. 42—54.

9. *Столяров А.В., Глухова Т.Н.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий. Чебоксары, 2007.

T. Zvereva

ON THE SPACE OF CONFORMAL CONNECTION AT THE TANGENTIAL FRAMED SURFACE OF THE CONFORMAL SPACE

We study the torsion-free space of conformal connection $C_{m,m}$ induced by tangential framing of the m-dimensional surface V_m in the conformal space C_n.