Вершиной конуса служит точка

$$C\left(\frac{1}{\bar{g}_{11}b^4_{11}},\ \frac{1}{\bar{g}_{22}b^5_{22}},\ \frac{1}{\bar{g}_{33}b^6_{33}}\right).$$

Она лежит на средней нормали $(x, \vec{M})$ графика.

Т е о р е м а 2. Если основание σ_3 отображения образовано характеристическими и скалярная кривизна графика V_3 равна нулю в каждой точке $x \in V_3$, то второй полярой точки x служит конус с вершиной на средней нормали графика.

Библиографический список

1.Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств// Учен.зап.МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970.Т.I.№ 374.С.41-51.

2.Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства // Сибирский матем.журнал.1966.№3.С.499-511.

3.Г р а ч е в а В.И. О некоторых случаях дифференцируемых отображений евклидовых пространств // Изв.вузов.Матем.1970. № 11.С.22-30.

4. С м е к а л о в а Н.П. О поверхностях V_2 в E_4 нулевой скалярной кривизны // Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии: Межвуз.темат.сб.науч.тр./ МГПИ им.В.И.Ленина, М.,1972.С.89-99.

5.Е ф р о с П.П. Об омбилических поверхностях $V_p \subset E_{p+3}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.26-29.

6.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем.сб./ АН Лит.ССР. Вильнюс,1966. Т.6.№ 4.С.475-490..

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

ПОЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ КОНУСОВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ P_n

Г.П.Б о ч и л л о
(Томский университет)

В работе показывается,что с регулярными распределениями Δ_n на многообразии M_{2n-1} [1] всех гиперплоских элементов $x=\{A,\alpha\}$ n-мерного проективного пространства P_n инвариантным образом ассоциируются семейства квадратичных конусов.(Здесь A – точка, α -инцидентная ей гиперплоскость пространства P_n). Этот геометрический факт отражает то обстоятельство,что регулярное распределение Δ_n на M_{2n-1} порождает поле невырожденного тензора второй валентности – главного фундаментального тензора распределения (г.ф.т.р.),продолжение уравнений которого приводит к самостоятельному объекту – подобъекту фундаментального объекта соответствующего порядка распределения Δ_n .Построены оснащающие распределения объекты,которые выражаются через компоненты г.ф.т.р. и его продолжения.Рассмотрены некоторые тензоры и частные виды распределений Δ_n ,связанные с семействами конусов.При этом установлена связь дифференциальной геометрии распределений Δ_n на M_{2n-1} с дифференциальной геометрией многообразий квадратичных элементов пространства P_n [2].

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, \ldots = 0,\overline{1,n};\quad i,j,\ldots = \overline{1,n};\quad p,q,\ldots, p_1,q_1,\ldots, p_2,q_2,\ldots = \overline{1,n-1},$$

а дифференциальный оператор ∇ определяется известным образом [3].

Присоединим к каждому элементу $x=\{A,\alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R=\{A_I\}$ и тангенциальные $\tau=\{\alpha^I\}$ подвижные реперы пространства P_n ,деривационные формулы которых имеют вид $dA_I=\omega_I^J A_J$, $d\alpha^I=-\omega_J^I\alpha^J$, причем 1-формы ω_I^J удовлетворяют условиям $d\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J$, $\sum_I \omega_I^I=0$. Положив $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$, перейдем к реперам $R_0(\tau^0)$, в которых структурными формами многообразия M_{2n-1} являются $(2n-1)$ форм ω_0^p, ω_0^n, ω_p^n. Распределение Δ_n на M_{2n-1} можно определить системой $(n-1)$ линейно независимых форм Пфаффа, что приводит к заданию на M_{2n-1} поля объекта $\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{\text{II}}$ [1]. Обозначим Γ_ρ фундаментальные объекты порядка ρ ($\rho = 1, 2$) распределения Δ_n.

Перейдем к реперам $R_1(\tau^1)$, адаптированным регулярному (аналогично [4]) распределению Δ_n. Тогда система $n-1$ форм Пфаффа, определяющая Δ_n, принимает вид $\theta_p \equiv \omega_p^n - \Lambda_{pq}^n \omega_0^q$ $(\det\|\Lambda_{pq}^n\| \neq 0)$ и распределение Δ_n порождает поле невырожденного тензора (г.ж.т.р.) $\hat{\Gamma}_0 = \{\Lambda_{pq}^n\}$:

$$\nabla \Lambda_{pq}^n + \Lambda_{pq}^n \omega_0^0 = \Lambda_{pqi}^n \omega_0^i + \Lambda_{pq}^{n\tau} \omega_\tau^n,$$

продолжение уравнений которого приводит к самостоятельным объектам $\hat{\Gamma}_1 = \{\Lambda_{pq}^n, \Lambda_{pqi}^n, \Lambda_{pq}^{n\tau}\}$, $\hat{\Gamma}_2 = \{\hat{\Gamma}_1, \Lambda_{pqij}^n, \Lambda_{pqi}^{n\tau}, \Lambda_{pq}^{n\tau s}\}$ $(\hat{\Gamma}_\rho \subset \Gamma_\rho)$:

$$\nabla \Lambda_{pqi}^n + 2\Lambda_{pqi}^n \omega_0^0 + (\Lambda_{p\tau}^n \omega_q^0 + \Lambda_{\tau q}^n \omega_p^0 + \Lambda_{pq}^n \omega_\tau^0)\delta_i^\tau + \Lambda_{pq}^{ns}\delta_i^n \omega_s^0 = \Lambda_{pqij}^n \omega_0^j + \Lambda_{pqi}^{n\tau}\omega_\tau^n,$$

$$\nabla \Lambda_{pq}^{ns} + \Lambda_{pq}^{ns}(\omega_0^0 - \omega_n^n) - (\Lambda_{p\tau}^n \delta_q^s + \Lambda_{\tau q}^n \delta_p^s + \Lambda_{pq}^n \delta_\tau^s)\omega_n^\tau = \Lambda_{pqi}^{ns}\omega_0^i + \Lambda_{pq}^{ns\tau}\omega_\tau^n,$$

$$\nabla \Lambda_{pqij}^n + 3\Lambda_{pqij}^n \omega_0^0 + 2\Lambda_{pq(i}^n \delta_{j)}^k \omega_k^0 + 2\Lambda_{\tau q(i}^n \delta_{j)}^\tau \omega_p^0 + 2\Lambda_{p\tau(i}^n \delta_{j)}^\tau \omega_q^0 + 2\Lambda_{pq(i}^n \omega_{j)}^0 + \Lambda_{pqi}^{n\tau}\omega_\tau^0 \delta_j^n \equiv 0 \pmod{\omega_i^0, \omega_p^n},$$

$$\nabla \Lambda_{pq}^{ns\tau} + \Lambda_{pq}^{ns\tau}(\omega_0^0 - 2\omega_n^n) - 2(\Lambda_{ps_1}^{n(s}\delta_q^{\tau)} + \Lambda_{s_1 q}^{n(s}\delta_p^{\tau)})\omega_n^{s_1} \equiv 0 \pmod{\omega_0^i, \omega_p^n},$$

$$\nabla \Lambda_{pqi}^{n\tau} + \Lambda_{pqi}^{n\tau}(2\omega_0^0 - \omega_n^n) - \Lambda_{pq}^{ns}\omega_s^0 \delta_i^\tau + (\Lambda_{sq}^{n\tau}\omega_p^0 + \Lambda_{ps}^{n\tau}\omega_q^0)\delta_i^s + \Lambda_{pq}^{n\tau}\omega_i^0 + \Lambda_{pq}^{n\tau s}\omega_s^0 \delta_i^n - (\Lambda_{psi}^n \delta_q^\tau + \Lambda_{sqi}^n \delta_p^\tau + \Lambda_{pqi}^n \delta_s^\tau)\omega_n^s + (\Lambda_{ps}^n \delta_q^\tau + \Lambda_{sq}^n \delta_p^\tau + \Lambda_{pq}^n \delta_s^\tau)\delta_i^s \omega_n^0 \equiv 0 \pmod{\omega_0^i, \omega_p^n}.$$

Тензоры $\{\Lambda_{(pq)}^n\}, \{\tilde{\Lambda}_0^{(pq)}\}$, где

$$\Lambda_{p\tau}^n \Lambda_0^{\tau q} = \Lambda_{\tau p}^n \Lambda_0^{q\tau} = \delta_p^q, \quad \Lambda_{(pq)}^n = \tfrac{1}{2}(\Lambda_{pq}^n + \Lambda_{qp}^n), \quad \tilde{\Lambda}_0^{(pq)} = \tfrac{1}{2}(\Lambda_0^{pq} + \Lambda_0^{qp}),$$

$$\nabla \Lambda_0^{pq} - \Lambda_0^{pq}\omega_n^n = \Lambda_{0i}^{pq}\omega_0^i + \Lambda_0^{pq\tau}\omega_\tau^n, \quad \Lambda_{0i}^{pq} = -\Lambda_{p_1 q_1 i}^n \Lambda_0^{pp_1}\Lambda_0^{q_1 q}, \quad \Lambda_0^{pq\tau} = -\Lambda_{p_1 q_1}^{n\tau}\Lambda_0^{pp_1}\Lambda_0^{q_1 q},$$

определяют конусы второго порядка (класса), которые являются геометрической моделью в P_n пересечения с $\Lambda_n(x)$ асимптотического конуса $K_{2n-3}(x)$ многообразия M_{2n-1}. Последний определяется следующими (эквивалентными) условиями двойственного характера:

$$A_0 \subset \alpha^n, \quad [A_0\, dA_0] \subset \alpha^n, \quad [A_0\, dA_0\, d^2A_0] \subset \alpha^n;$$

$$\alpha^n \supset A_0, \quad [\alpha^n\, d\alpha^n] \supset A_0, \quad [\alpha^n\, d\alpha^n\, d^2\alpha^n] \supset A_0,$$

из которых вытекают уравнения $K_{2n-3}(x)$ в $T_x M_{2n-1}$: $t^n = 0$, $t_p t^p = 0$. Здесь $\{t^p, t^n, t_p\} \equiv \{t\}$ – объект, определяющий 1-семейство $M_1\{t\}$ гиперплоских элементов ($\omega_0^p = t^p\theta$, $\omega_0^n = t^n\theta$, $\omega_p^n = t_p\theta$, $d\theta = \theta \wedge \theta_1$).

2. Обозначим $\Lambda_\rho\,(\Lambda^\rho)$ фундаментальные объекты порядка ρ, порождаемые тензорами $\{\Lambda_{(pq)}^n\}(\{\tilde{\Lambda}_0^{(pq)}\})$, а через ${}^A\Lambda_\rho, {}^\alpha\Lambda_\rho\,({}_A\Lambda^\rho, {}_\alpha\Lambda^\rho)$ – их подобъекты – фундаментальные объекты $(n-1)$-семейств конусов, ассоциированных с Δ_n на M_{2n-1} при неподвижной точке A_0 или гиперплоскости α^n соответственно.

Т е о р е м а I. Фундаментальный объект Γ_ρ распределения Δ_n на M_{2n-1} имеет подобъект ${}^A\Lambda_\rho \subset \Lambda_\rho$, ${}^\alpha\Lambda_\rho \subset \Lambda_\rho$ $({}_A\Lambda_\rho, {}_\alpha\Lambda_\rho \subset \Lambda_\rho)$, дифференциальные уравнения которых по форме совпадают с дифференциальными уравнениями подобъекта того же порядка многообразия $(n-1, n-1, n-1)^2$ квадратичных элементов [2].

Доказательство теоремы следует из сравнения систем дифференциальных уравнений подобъектов

$${}^\alpha\Lambda_1 \equiv \{\Lambda_{(pq)}^n, \Lambda_{(pq)\tau}^n\}, \quad {}^A\Lambda_1 = \{\Lambda_{(pq)}^n, \Lambda_{(pq)}^{n\tau}\} \quad \left({}_\alpha\Lambda^1 = \{\tilde{\Lambda}_0^{(pq)}, \tilde{\Lambda}_{0\tau}^{(pq)}\}, {}_A\Lambda^1 = \{\tilde{\Lambda}_0^{(pq)}, \Lambda_0^{(pq)\tau}\}\right);$$

$${}^\alpha\Lambda_2 = \{{}^\alpha\Lambda_1, \Lambda_{(pq)\tau s}^n\}, \quad {}^A\Lambda_2 = \{{}^A\Lambda_1, \Lambda_{(pq)}^{n\tau s}\} \quad \left({}_\alpha\Lambda^2 = \{{}_\alpha\Lambda^1, \tilde{\Lambda}_{0\tau s}^{(pq)}\}, {}_A\Lambda^2 = \{{}_A\Lambda^1, \tilde{\Lambda}_0^{(pq)\tau s}\}\right)$$

с дифференциальными уравнениями фундаментального объекта соответствующего порядка многообразия $(n-1, n-1, n-1)^2$ квадратичных элементов в P_{n-1} [2]. Эта теорема позволяет в дифференциальной геометрии распределений применить геометрию многообразий $(n, n, n)^2$ [2].

В [5], [6] доказано, что задание аффинной связности на M_{2n-1} эквивалентно оснащению M_{2n-1} полем $\{N, \nu\}$ – нормализующих гиперплоских элементов. Здесь $N = A_n + x_n^p A_p + x_n^0 A_0$, $\nu = \alpha^0 + \xi_p^0 \alpha^p + \xi_n^0 \alpha^n$, $x_n^0 + \xi_n^0 + x_n^p \xi_p^0 = 0$ и $\{x_n^p, x_n^0\}, \{\xi_p^0, \xi_n^0\}; \{x_n^p\}, \{\xi_p^0\}$ – геометрические объекты. Рассмотрим следующие системы величин:

$$\bar{\Lambda}_p = -\frac{1}{n+1}\Lambda_{(q\tau)p}^n \Lambda_0^{(q\tau)}, \quad \bar{\Lambda}^p = -\frac{1}{n+1}\Lambda_{(q\tau)}^{np}\Lambda_0^{(q\tau)} \quad \left(\Lambda_{(p\tau)}^n \Lambda_0^{(\tau q)} = \delta_p^q\right).$$

Используя (I), находим, что $\{\bar{\Lambda}_p\}, \{\bar{\Lambda}^p\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям объектов $\{\xi_p^0\}, \{x_n^p\}$ соответственно и определяют I-пару $\{\bar{L}_1, \bar{\ell}_{n-2}\}$, инвариантно присоединенную к $x = \{A, \alpha\}$ и внутренним образом связанную с Δ_n:

$$\bar{L}_1 = [A_0, A_n + \bar{\Lambda}^p A_p], \quad \bar{\ell}_{n-2} = [\alpha^n, \alpha^0 + \bar{\Lambda}_p \alpha^p].$$

Далее находим

$$\bar{\bar{\ell}}_{n-2}=[\alpha^n,\alpha^0+\bar{\bar{\Lambda}}_p\alpha^p]\ (\bar{\bar{\Lambda}}_p=\Lambda^n_{pq}\bar{\Lambda}^q),\ \bar{\bar{L}}_1=[A_0,A_n+\bar{\bar{\Lambda}}^pA_p]\ (\bar{\bar{\Lambda}}^p=\Lambda^{pq}_0\bar{\Lambda}_q);$$

$$\tilde{\ell}_{n-2}=[\alpha^n,\alpha^0+\tilde{\Lambda}_p\alpha^p]\ (\tilde{\Lambda}_p=\tfrac{1}{2}(\bar{\Lambda}_p-\bar{\bar{\Lambda}}_p)),\ \tilde{L}_1=[A_0,A_n+\tilde{\Lambda}^pA_p]\ (\tilde{\Lambda}^p=\tfrac{1}{2}(\bar{\Lambda}^p-\bar{\bar{\Lambda}}^p)),$$

причем величины $\{\bar{\bar{\Lambda}}_p\}$, $\{\tilde{\Lambda}_p\}$ и $\{\bar{\bar{\Lambda}}^p\}$, $\{\tilde{\Lambda}^p\}$ также удовлетворяют дифференциальным уравнениям объектов $\{\Xi^0_p\}$ и $\{x^p_n\}$ соответственно. Отсюда приходим к оснащающей I-паре $\{{}^N L_1, {}^\nu \ell_{n-2}\}$, внутренним образом связанной с Δ_n, причем

$$DV({}^N L_1;\tilde{L}_1,\bar{L}_1,\bar{\bar{L}}_1)=-1 \Leftrightarrow DV({}^\nu\ell_{n-2},\tilde{\ell}_{n-2};\bar{\ell}_{n-2},\bar{\bar{\ell}}_{n-2})=-1.$$

Построение нормализующего гиперплоского элемента $\{N,\nu\}$ ($N\subset {}^N L_1$, $\nu\supset{}^\nu\ell_{n-2}$) осуществляется далее аналогично [5]. Отсюда вытекает

Т е о р е м а 2. Инвариантное оснащение многообразия M_{2n-1} полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$, внутренним образом связанным с распределением Δ_n на M_{2n-1}, может быть построено с использованием лишь компонент подобъекта $\{{}^A\Lambda_2, {}^\alpha\Lambda_2\}\subset\Lambda_2\subset\Gamma_2$.

З а м е ч а н и е. Если $\Lambda^n_{[pq]}=0$, то по аналогии с объектами $\bar{\Lambda}_p$, $\bar{\Lambda}^p$ могут быть построены другие оснащающие объекты, которые выражаются через компоненты объекта $\Lambda^1=\{\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0, \tilde{\Lambda}^{(pq)}_{0i}, \tilde{\Lambda}^{(pq)r}_0\}$.

Рассмотрим следующие системы величин, охватываемые ${}^\alpha\Lambda_1$:

$$a_{(pqr)}=\Lambda^n_{(pqr)}+3\Lambda^n_{((pq)}\dot{\Lambda}_{r)},\quad \dot{\Lambda}_r=-\frac{1}{n+1}\Lambda^n_{(pqr)}\Lambda^{(pq)}_0,$$

$$A_{(pq)}=a_{(pp_1p_2)}a_{(qq_1q_2)}\Lambda^{(p_1q_1)}_0\Lambda^{(p_2q_2)}_0;$$

охватываемые ${}^A\Lambda_1$:

$$a^{(pqr)}=\Lambda^{(pqr)}_0+3\Lambda^{((pq)}_0\dot{\Lambda}^{r)},\quad \dot{\Lambda}^r=-\frac{1}{n+1}\tilde{\Lambda}^{(pqr)}_0\Lambda^n_{(pq)},$$

$$A^{(pq)}=a^{(pp_1p_2)}a^{(qq_1q_2)}\Lambda^n_{(p_1q_1)}\Lambda^n_{(p_2,q_2)},$$

где $\tilde{\Lambda}^{(pqr)}=\Lambda^{n(r}_{sq_1}\Lambda^{|q_1|q}_0\Lambda^{p)s}_0$, $\tilde{\Lambda}^{(pr)}_0\tilde{\Lambda}^n_{(rq)}=\delta^p_q$; охватываемые $\{{}^A\Lambda_1, {}^\alpha\Lambda_1\}$:

$$A_{(pqr)}=(n+1)\Gamma_{(pqr)}-3\Lambda^n_{((pq)}A_{r)},\quad \Gamma_{(pqr)}=\Lambda^n_{(pqr)}+\Lambda^{ns}_{(pq}\Lambda^n_{|s|r)},$$

$$A_r=\Gamma_{(pqr)}\Lambda^{(pq)}_0,\quad A^{(pqr)}=A_{(p_1q_1r_1)}\Lambda^{p_1(p}_0\Lambda^{|q_1|q}_0\Lambda^{|r_1|r)}_0.$$

При фиксированных главных параметрах имеем

$$\nabla_\delta a_{(pqr)}=-a_{(pqr)}(2\pi^0_0+\pi^n_n),\ \nabla_\delta A_{(pq)}=6\pi^0_0A_{(pq)},$$

$$\nabla_\delta a^{(pqr)}=(\pi^0_0+2\pi^n_n)a^{(pqr)},\ \nabla_\delta A^{(pq)}=2(\pi^0_0+3\pi^n_n)A^{(pq)},\ \nabla_\delta A_{(pqr)}=-(2\pi^0_0+\pi^n_n)A_{(pqr)},$$

откуда следует, что системы величин $a_{(pqr)}$, $A_{(pq)}$, $a^{(pqr)}$, $A^{(pq)}$, $A_{(pqr)}$, $A^{(pqr)}$ образуют тензоры. Геометрическую характеристику этих тензоров нетрудно получить, опираясь на теорему I. Приведем, например, геометрическую характеристику тензоров $A_{(pqr)}$ ($A^{(pqr)}$).

Асимптотическими второго порядка назовем такие I-семейства $M_1\{t\}$ гиперплоских элементов, касающихся K_{2n-3}, для которых в P_n еще выполняется условие $[A_0 dA_0 d^2A_0 d^3A_0]\subset\alpha^n$. При этом соответствующие линии $(A_0)_1$ называются тоже асимптотическими второго порядка. Условие двойственного характера $[\alpha^n d\alpha^n d^2\alpha^n d^3\alpha^n]\supset A_0$ для I-семейств $M_1\{t\}\subset M_{2n-1}$, касающихся K_{2n-3}, приводит к тем же уравнениям: $\omega^n_0=0$, $\omega^p_0\omega^n_p=0$, $d\omega^p_0\omega^n_p+\omega^q_0\omega^p_q\omega^n_p=0$.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы все интегральные I-семейства распределения Δ_n, касающиеся асимптотического конуса K_{2n-3}, были асимптотическими второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы $A_{(pqr)}=0$ ($A^{(pqr)}=0$).

Доказательство теоремы следует из строения тензоров $A_{(pqr)}$ $A^{(pqr)}$ и уравнений асимптотических.

Библиографический список

I. Б о ч и л л о Г.П. Распределения на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1984. Вып. I5. С. 9-I3.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве // Геометр.сб.: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Томский ун-т. Томск, I963. Вып. 3. С. 28-42.

3. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия: Учеб.пособие/Калининск.ун-т. Калинин, I977. 84с.

4. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по вект.и тенз.анализу. М.;Л., I950. С. I97-272.

5. Б о ч и л л о Г.П. К дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства ($m<n$) // Геометр.сб.: Межвуз.темат. сб.науч.тр./Томский ун-т. Томск, I985. Вып. 25. С. 35-42.

6. Б о ч и л л о Г.П. О дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства ($m<n$) // Томский ун-т. Томск, I983. 2Iс. Библиогр. I5 назв. Деп. в ВИНИТИ 8.02.84. №762-84.

7. М а л а х о в с к и й В.С. Оснащенные гиперкомплексы квадратичных элементов // Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ. М., I973. Т. 4. С. I67-I78.