УДК 514.75

***М. А. Чешкова*[1]**
[1] Алтайский государственный университет, Россия
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

Тор как поверхность переноса

Приводится пример тора, отличного от классического, который получается при вращении окружности вокруг оси. Мы рассматриваем тор как поверхность переноса, которая получается при параллельном переносе одной окружности вдоль другой. С помощью системы компьютерной математики строятся рассматриваемые поверхности.

Ключевые слова: поверхность переноса, тор, периодические функции.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность переноса M (см.: [1, с. 315; 2, с. 130; 3]):

$$r(u,v) = U(u) + V(v),\ u \in [-\pi,\pi],\ v \in [-\pi,\pi], \tag{1}$$

где $U(u), V(v)$ 2π — периодические вектор-функции, причем кривые $U = U(u), V = V(v)$ не принадлежат одной плоскости и не вырождаются в отрезки прямой.

Формула (1) определяет [4, с. 75] модель тора. Действительно,

$$r(-\pi,v) = U(-\pi) + V(v) = U(-\pi + 2\pi) + V(v) = r(\pi,v),$$

Поступила в редакцию 21.08.2017 г.
© Чешкова М. А., 2018

$$r(u,-\pi) = U(u) + V(-\pi) = U(u) + V(-\pi + 2\pi) = r(u,\pi).$$

Имеем склейку противоположных сторон прямоугольника $u \in [-\pi,\pi], v \in [-\pi,\pi]$ по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку по точкам, лежащим на общей вертикали [4, с. 75].

Рассмотрим вектор-функцию

$$r(v) = U(kv) + V(v), v \in [-\pi,\pi].$$

Ищем обмотку тора. Если обмотка тора — замкнутая кривая [3], то k — рациональное число.

Действительно,

$$r(v + 2\pi n_1) = U(k(v + 2\pi n_1)) + V(v + 2\pi n_1) = r(v) =$$

$$= U(kv + 2\pi n_2) + V(v), k = \frac{n_2}{n_1}, n_1, n_2 \in N.$$

Модели тора

Рассмотрим поверхности переноса *M*:

$$r(u, v) = (\cos(v), \sin(v) + a\cos(u), a\sin(u)),\ u \in [-\pi, \pi],$$
$$v \in [-\pi, \pi],\ a \in R.$$

В нашем случае

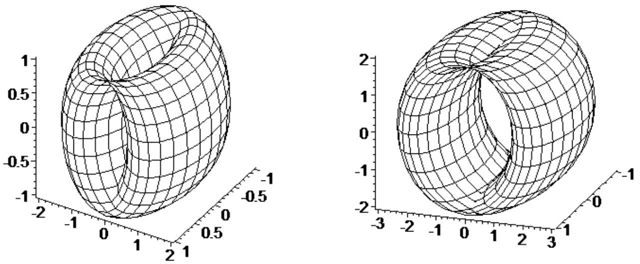
$$U(u) = (0, \cos(u), \sin(u)), V(v) = (a\cos(v), a\sin(v), 0). \qquad (2)$$

Кривые (2) есть окружности. Будем рассматривать случаи, когда радиусы окружностей $a = 1$ и $a \neq 2$.

Построим поверхность переноса *M*, полагая $a = 1, 2$ (рис. 1).

Поверхность переноса *M* можно рассматривать как параллельное перенесение одной линии вдоль другой.

Построим ее для случая $a = 2$ (рис. 2).



а *б*

Рис. 1. Тор:
а — *а* = 1; *б* — *а* = 2

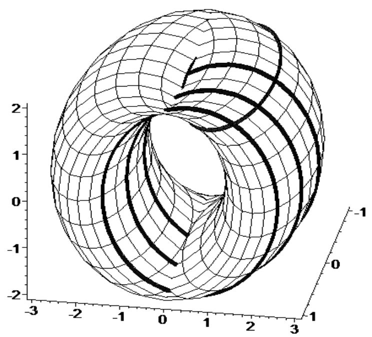


Рис. 2. Тор как поверхность переноса

Характер точек на торе *M*

Обычным способом определим гауссову кривизну K поверхности. Имеем

$$K = \frac{b}{g}, \text{ где } b = \det(b_{ij}),\ \ g = \det(g_{ij}),\ \ i,\ j = 1, 2,$$

$$g_{ij} =< r_i, r_j >, r_1 = r_u, r_2 = r_v, b_{ij} =< r_{ij}, [r_1, r_2] > \frac{1}{\sqrt{g}},$$

$$g = a^2(1-\cos(v)^2\sin(u)^2),$$

$$K = \frac{\sin(v)\cos(u)}{a(1-\cos(v)^2\sin(u)^2)}. \qquad (3)$$

Для параболических точек

$$\sin(v)\cos(u) = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) определяет четыре окружности:

$$S_1 : r = r(u, 0) = (1, a\cos(u), a\sin(u)),$$
$$S_2 : r = r(u, \pi) = (-1, a\cos(u), a\sin(u)),$$
$$S_3 : r = r(\pi/2, v) = (\cos(v), \sin(v), a),$$
$$S_4 : r(-\pi/2, v) = (\cos(v), \sin(v), -a).$$

Точки касания этих окружностей

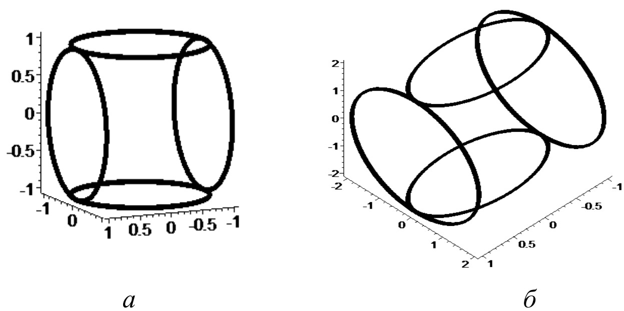
$$P1(\pi/2, 0) = (1,0,a),\ P2(-\pi/2, 0) = (1, 0, -a),$$
$$P3(\pi/2, \pi) = (-1, 0, a),\ P4(-\pi/2, \pi) = (-1, 0, -a)$$

есть особые точки. Для них $g = 0$.

Замечаем, что

$P_1 \in S_1, P_1 \in S_3; P_2 \in S_1, P_2 \in S_4; P_3 \in S_4, P_3 \in S_2; P_4 \in S_3, P_4 \in S_2$.

Построим эти окружности при $a = 1, a = 2$ (рис. 3).



а *б*

Рис. 3. Параболические точки на торе *M*:
а — $a = 1$; *б* — $a = 2$

Для эллиптических точек

$$\sin(v)\cos(u) > 0 \tag{6}$$

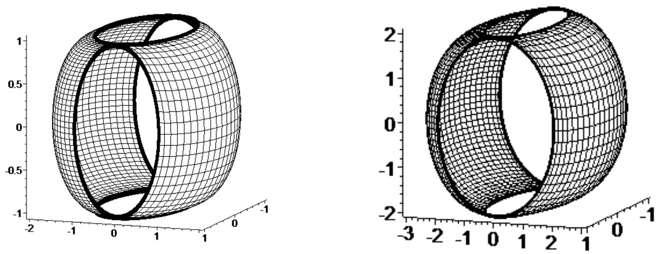
имеем три куска поверхности:

$$ME1: u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (0, \pi),$$

$$ME2: u \in (-\pi, -\pi/2), v \in (-\pi, 0),$$

$$ME3: u \in (\pi/2, \pi), v \in (-\pi, 0).$$

Построим их (рис. 4).



а *б*

Рис. 4. Эллиптические и параболические точки на торе *M*:
а — *a* = 1; *б* — *a* = 2

Для гиперболических точек

$$\sin(v)\cos(u) < 0 \tag{6}$$

имеем три куска поверхности:

$$MG1: u \in (\pi/2, \pi), v \in (0, \pi),$$

$$MG2: u \in (-\pi, -\pi/2), v \in (0, \pi),$$

$$MG3: u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (-\pi, 0).$$

Построим их (рис. 5).

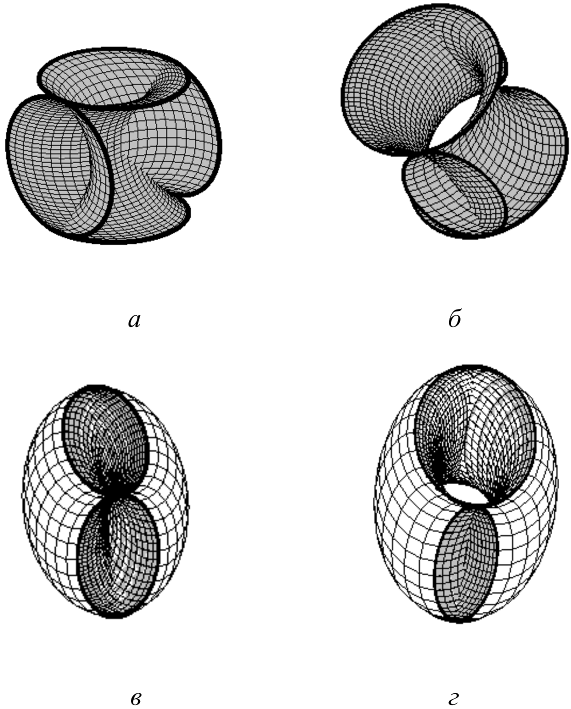


Рис. 5. Гиперболические и параболические точки на торе *M*:
а — $a = 1$; *б* — $a = 2$; *в* — $a = 1$; *г* — $a = 2$

Список литературы

1. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.

2. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

3.*Чешкова М.А.* О поверхностях переноса в евклидовом пространстве // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сб. тр. всерос. конф. Барнаул, 2015. С. 130—132.

4. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Ведение в топологию. М., 1995.

M. Cheshkova[1]
[1] *Altai State University*
61 Pr. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

Torus as translation surface

Submitted on August 21, 2017

The translation surface is the surface formed by the parallel transfer of the curve so that its point slides along another curve.

We study the torus different from the classic torus, which is obtained by rotating the circle along the axis. We consider the torus as the surface of translation. We obtain the surface of translation by parallel translation of one circle along the other circle.

We constructed the surface of translation in Euclidean space E^3 with the help of mathematical package.

Keywords: translation surface, torus, periodic function.

References

1. *Shulikovsky, V.I.:* Classical differential geometry. M., GIFML (1963) (in Russian).
2. *Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N., Khalabi, S.M.:* Analytical surfaces. Moscow (2006) (in Russian).
3. *Cheshkova, M.A.:* On translation surfaces in Euclidean space. Proceedings of Conference “Mathematics and its applications: fundamental problems of science and technology”. Barnaul (2015) (in Russian).
4. *Borisovich, Yu.G., Bliznyakov, N.M., Izrailevich, Ya.A., Fomenko, T.N.:* Introduction to topology. Moscow, Nauka (1995) (in Russian).