V. Malakhovsky

ABOUT ONE CLASS OF SURFACES
IN 3-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

In 3-dimensional projective space P_3 a smooth non linear surface σ with parabolic line congruences of the first and the second directrexes of Wilcynski is considered. It is proved, the existence of such surfaces and sum special cases are investigated.

УДК 514.75

В. С. Малаховский, Н. В. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта)

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА *m*-МЕРНОМ НЕВЫРОЖДЕННОМ МНОГООБРАЗИИ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В *n*-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (*m*<*n*)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрено m-мерное многообразие V_m (n - 2)-мерных невырожденных квадрик Q_{n-2} (квадратичных элементов) $(n \geq 3, m < n)$ в предположении, что гиперплоскости квадрик также образуют m-параметрическое семейство и что характеристика гиперплоскости не пересекается со своим полярным относительно Q_{n-2} подпространством.

С использованием компьютерной программы нахождения продолжений и охватов полей геометрических объектов на дифференцируемом многообразии [3, с. 77—107] найдены тензорные и квазитензорные поля на V_m и рассмотрены определяемые ими геометриче-

ские образы. Для каждого $Q_{n-2} \in V_m$ найдены в P_n две инвариантные точки, определяющие на V_m два инвариантных оснащения.

§ 1. Система пфаффовых уравнений многообразия V_m

Определение 1.1. *Многообразие V_m квадратичных элементов Q_{n-2} при $m < n$ называется невырожденным, если характеристическое подпространство гиперплоскости квадратичного элемента Q_{n-2} не пересекается со своим полярным относительно Q_{n-2} подпространством.*

Невырожденное многообразие V_m отнесём полярно канонизированному реперу $\{A_\alpha, A_{n+1}\}$, расположив вершины A_i в полярном подпространстве, A_a — в характеристическом подпространстве, а вершину A_{n+1} — вне гиперплоскости квадратичного элемента. Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, h, l = \overline{1, m},\ a, b, c, d = \overline{m+1, n},\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

Уравнения квадратичного элемента Q_{n-2} приводятся к виду:

$$a_{ij}x^i x^j + a_{bc}x^b x^c = 0,\ x^{n+1} = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим символом $\nabla m^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ тензорную часть дифференциальной формы без слагаемого с множителем $m^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, т.е.

$$\begin{aligned}\nabla m^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} &= dm^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} - m^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_p} - \ldots - m^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\gamma} + \\ &+ m^{\gamma\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} + \ldots + m^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{q-1}\gamma}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}.\end{aligned} \quad (1.3)$$

Система пфаффовых уравнений многообразия V_m запишется в виде:

$$\nabla a_{ij} - \frac{2}{n} a_{ij}\omega_{n+1}^{n+1} = b_{ij}^k \omega_k, \ \ \nabla a_{bc} - \frac{2}{n} a_{bc}\omega_{n+1}^{n+1} = b_{bc}^k \omega_k, \ \ \omega_a = 0,$$

$$\omega_a^i = h_a^{ij}\omega_j, \ \ \omega_i^a = k_i^{aj}\omega_j, \tag{1.4}$$

где

$$\omega_\alpha \overset{def}{=} \omega_\alpha^{n+1}. \tag{1.5}$$

В силу нормировки

$$\left(A_1 A_2 \ldots A_{n+1}\right) = 1, \quad \det\left(a_{\alpha\beta}\right) = 1, \tag{1.6}$$

получим:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^n + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \tag{1.7}$$

$$a^{ij} b_{ij}^k + a^{bc} b_{bc}^k = 0. \tag{1.8}$$

Продолженная система уравнений (1.4) имеет вид

$$\begin{cases} \nabla b_{ij}^k - \dfrac{2+n}{n} b_{ij}^k \omega_{n+1}^{n+1} + \left(\dfrac{2}{n}\delta_h^k a_{ij} - \delta_i^k a_{hj} - \delta_j^k a_{hi}\right)\omega_{n+1}^h = b_{ij}^{kl}\omega_l, \\ \nabla b_{ab}^i - \dfrac{2+n}{n} b_{ab}^i \omega_{n+1}^{n+1} + \dfrac{2}{n} a_{ab}\omega_{n+1}^i = \widehat{b}_{ab}^{ij}\omega_j, \\ \nabla h_a^{ij} - h_a^{ij}\omega_{n+1}^{n+1} = h_a^{ijk}\omega_k, \quad \nabla k_i^{aj} - k_i^{aj}\omega_{n+1}^{n+1} + \delta_i^j \omega_{n+1}^a = k_i^{ajk}\omega_k, \end{cases} \tag{1.9}$$

причём

$$\widehat{b}_{ij}^{[kl]} = \frac{1}{2}\left[a_{mj}\left(h_a^{lm}k_i^{ak} - h_a^{km}k_i^{al}\right) + a_{mi}\left(h_a^{lm}k_j^{ak} - h_a^{km}k_j^{al}\right)\right]. \tag{1.10}$$

§ 2. Поля геометрических объектов на многообразии V_m

Используя компьютерную программу продолжений и охватов [3, с. 77—107], убеждаемся, что на невырожденном многообразии V_m квадратичных элементов определяются различные поля линейных геометрических объектов (тензоров и квазитензоров), определяющие в проективном пространстве P_n инвариантные точки, линейные подпространства, конусы и невырожденные квадрики, заданные в инвариантных подпространствах.

Из (1.4) следует, что системы величин $\{a_{ij}\}$, $\{a_{bc}\}$ являются тензорами. Так как

$$\det\left(a_{ij}\right)\cdot\det\left(a_{bc}\right)=\det\left(a_{\alpha\beta}\right)=1, \tag{2.1}$$

то

$$\det\left(a_{ij}\right)\neq 0,\ \det\left(a_{bc}\right)\neq 0. \tag{2.2}$$

Используя неравенства (2.2), соотношениями

$$a_{ik}a^{kj}=\delta_i^j,\ a_{bd}a^{dc}=\delta_b^c \tag{2.3}$$

можно определить взаимные тензоры $\{a^{ij}\}$, $\{a^{bc}\}$, которые вместе с тензорами $\{a_{ij}\}$ и $\{a_{bc}\}$ назовём базовыми тензорами. Обозначим:

$$b^i=a^{jk}b^i_{jk},\ a^i=a^{ij}b^k_{jk}. \tag{2.4}$$

Наряду с базовыми тензорными полями на многообразии V_m определены следующие геометрические объекты:

1) тензоры

$$\{c^i\},\ \{h_a^{ij}\},\ \{u^i\},\ \{r^{ij}\},\ \{s^{ab}\},\ \{b_{ijk}\},\ \{n_{iab}\},\ \{t^{ij}\},$$
$$\{s_{ij}^a\},\{u^{ij}\},\ \{v^{ija}\},\ \{c_a^{ijk}\},\ \{t_a^{ijb}\},\ \{v^a\},\ \{s^a\},\ \{c_a\},\ \{u^a\}, \tag{2.5}$$

где

$$c^i=2(n-m)a^i+(2-mn-n)b^i,\ r^{ij}=h_a^{(ij)}k_l^{al}-mh_a^{(\gamma|l|}k_l^{|a|i)},$$
$$s^{ab}=k_j^{(a|j|}k_i^{b)i}-mk_i^{(a|j|}k_j^{b)i},$$

$$b_{ijk} = a_{l(i}b^{l}_{jk)} - \frac{2(n-1)}{n(m+1)-2} b^{l}_{l(i}a_{jk)},$$

$$n_{iab} = (2-mn-n)b^{j}_{(ab)}a_{ij} - 2b^{j}_{ij}a_{ab}, \;\; t^{ij} = h^{(ij)}_{a}k^{al}_{l} - mh^{(j|k|}_{a}k^{|a|i)}_{k},$$

$$s^{a}_{ij} = mk^{pk}_{(i}a_{j)k} - k^{al}_{l}a_{ij}, \;\; u^{ij} = b^{i}b^{j} + (m-n)a^{ab}a^{cd}b^{(i}_{ac}b^{j)}_{bd},$$

$$v^{ija} = mk^{a(j}_{l}a^{i)l} - k^{al}_{l}a^{ij}, \tag{2.6}$$

$$c^{ijk}_{a} = (m-n)h^{(jk}_{c}b^{i)}_{ab}a^{bc} - h^{(jk}_{h}b^{i)}_{bc}a^{bc}, \;\; t^{ijb}_{a} = h^{(ij)}_{a}k^{al}_{l} - mh^{(j\|l\|}_{a}k^{|b|i)}_{l},$$

$$c_{a} = b_{ijk}c^{ijk}_{a}, \;\; v^{a} = a_{ij}v^{ija}, \;\; s^{a} = a^{ij}s^{a}_{ij}, \;\; u^{a} = u^{ija}s^{a}_{ij};$$

2) квазитензоры

$$\{k^{a}\}, \;\; \{a^{i}\}, \;\; \{b^{i}\}, \tag{2.7}$$

где

$$k^{a} = k^{ai}_{i}, \;\; a^{i} = a^{ij}b^{l}_{jl}, \;\; b^{i} = a^{jk}b^{i}_{jk}. \tag{2.8}$$

§ 3. Геометрические образы, порождённые тензорными и квазитензорными полями на V_m

Дважды ковариантные тензоры $\{a_{ij}\}$, $\{a_{bc}\}$ определяют в гиперплоскости квадратичного элемента $Q_{n-2} \in V_m$ невырожденные квадрики

$$a_{ij}x^{i}x^{j} = 0, \;\; x^{a} = 0, \;\; x^{n+1} = 0, \tag{3.1}$$

$$a_{bc}x^{b}x^{c} = 0, \;\; x^{i} = 0, \;\; x^{n+1} = 0 \tag{3.2}$$

соответственно в полярном и характеристическом подпространствах.

Пары квазитензоров $\{a^{i}, k^{a}\}$, $\{b^{i}, k^{a}\}$ определяют в проективном пространстве P_n инвариантные точки

$$A = A_{n+1} - \frac{n}{n(m+1)-2}a^{i}A_{i} + \frac{1}{m}k^{a}A_{a}, \tag{3.3}$$

$$B = A_{n+1} - \frac{n}{2(n-m)} b^i A_i + \frac{1}{m} k^a A_a, \tag{3.4}$$

не лежащие в гиперплоскости квадратичного элемента Q_{n-2}.

Точки A и B позволяют произвести дальнейшую канонизацию репера многообразия V_m двумя способами: путём совмещения точки A_{n+1} либо с инвариантной точкой A (репер 1-го рода), либо с инвариантной точкой B (репер 2-го рода). Из уравнений

$$\begin{gathered}\delta a^i + a^j \pi_j^i - a^i \pi_{n+1}^{n+1} = \frac{1}{n}(mn + n - 2)\pi_{n+1}^i, \\ \delta b^i + b^j \pi_j^i - b^i \pi_{n+1}^{n+1} = \frac{2}{n}(n-m)\pi_{n+1}^i, \\ \delta k^a + k^b \pi_b^a - k^a \pi_{n+1}^{n+1} = -m\pi_{n+1}^a\end{gathered} \tag{3.5}$$

следует, что такая канонизация корректна:

$$1)\, a_i = 0,\ k^a = 0 \to \pi_{n+1}^\alpha = 0;\ 2)\, b^i = 0,\ k^a = 0 \to \pi_{n+1}^\alpha = 0. \tag{3.6}$$

При этом к системе (1.4) присоединяются пфаффовы уравнения

$$\omega_{n+1}^\alpha = \breve{a}^{\alpha i}\omega_i \text{ или } \omega_{n+1}^\alpha = \breve{b}^{\alpha i}\omega_i, \tag{3.7}$$

продолжения которых имеют вид:

$$\nabla \breve{a}^{\alpha i} - 2\breve{a}^{\alpha i}\omega_{n+1}^{n+1} = \breve{a}^{\alpha i j}\omega_j \text{ или } \nabla \breve{b}^{\alpha i} - 2\breve{b}^{\alpha i}\omega_{n+1}^{n+1} = \breve{b}^{\alpha i j}\omega_j. \tag{3.8}$$

Из уравнений (3.8) следует, что система величин $\{\breve{a}^{\alpha i}\}$ и, соответственно, $\{\breve{b}^{\alpha i}\}$ являются тензорами, включающими подтензоры $\{\breve{a}^{ij}\}$ $\{\breve{a}^{bi}\}$ или $\{\breve{b}^{ij}\}$ $\{\breve{b}^{ai}\}$.

Будем рассматривать многообразие V_m в репере 1-го рода $(A_{n+1} \equiv A)$ (для репера 2-го рода рассуждения аналогичны). Инвариантная точка B определяется формулой

$$B = A_{n+1} - \frac{n}{2(n-m)} b^i A_i. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что точка A совпадает с точкой B тогда и только тогда, когда тензор $\{b^i\}$- нулевой. Исключая этот случай, рассмотрим инвариантную прямую AB. Она пересекает гиперплоскость квадратичного элемента Q_{n-2} в точке

$$B^* = b^i A_i\,, \tag{3.10}$$

$(n-2)$-мерная поляра которой относительно квадратичного элемента Q_{n-2} определяется уравнениями:

$$a_{ij} b^i x^j = 0,\ \ x^{n+1} = 0\,. \tag{3.11}$$

Для конгруэнции невырожденных коник в P_3 (случай $n=3$) точки B и B^* однозначно определяют геометрически фиксированный репер, если $B^* \notin Q_1 : A_4 \equiv A;\ \ A_3 = B^*;\ \ A_1$ и A_2 — точки пересечения с коникой C_1 поляры B^* относительно C_1. Используя тензоры (2.5) и базовые тензоры $\{a_{ij}\}$, $\{a_{bc}\}$, $\{a^{ij}\}$, $\{a^{bc}\}$, находим:

$$b_i = a_{ij} b^j,\ \ n_i = a^{bc} n_{ibc},\ \ \breve{s}_a = a_{ab} a^{ij} s^b_{ij},\ \ \breve{v}_a = a_{ab} a_{ij} v^{ija},$$
$$\breve{c}_a = b_{ijk} c^{ijk}_a,\ \ c_i = a_{ij} c^j,\ \ h_a = a_{ij} h_a,\ \ u_i = a_{ij} u^j,$$
$$u_a = a_{ab} u^b,\ \ v_a = a_{ab} v^b,\ \ s_a = a_{ab} s^b; \tag{3.12}$$

$$r_{ij} = a_{ik} a_{jl} r^{kl},\ \ s_{ab} = a_{ac} a_{ba} s^{cd},\ \ s_{ij} = c_a s^a_{ij},\ \ t_{ij} = a_{ik} a_{jl} t^{kl}. \tag{3.13}$$

Одновалентные тензоры (3.12) определяют в P_n инвариантные гиперплоскости:

$$c_a x^a = 0,\ \ h_a x^a = 0,\ \ s_a x^a = 0,\ \ u_a x^a = 0,\ \ v_a x^a = 0, \tag{3.14}$$

$$b_i x^i = 0,\ \ c_i x^i = 0,\ \ n_i x^i = 0,\ \ n_i x^i = 0, \tag{3.15}$$

содержащие соответственно характеристические и полярные подпространства квадратичного элемента Q_{n-2}.

Двухвалентные базисные тензоры $\{a_{ij}\}$, $\{a_{bc}\}$ и тензоры (3.13) определяют квадратичные гиперконусы

$$a_{bc}x^b x^c = 0,\ s_{bc}x^b x^c = 0,\ a_{ij}x^i x^j = 0,$$
$$r_{ij}x^i x^j = 0,\ s_{ij}x^i x^j = 0,\ t_{ij}x^i x^j = 0 \qquad (3.16)$$

с плоскими (соответственно) m-мерными и $(n-m)$-мерными вершинами.

Трёхвалентный тензор $\{b_{ijk}\}$ определяет в P_n инвариантный гиперконус третьего порядка

$$b_{ijk}x^i x^j x^k = 0 \qquad (3.17)$$

с $(n-m)$-мерной плоской вершиной.

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве // Геометрический сб. №3. Труды Томского университета. 1968. Т. 168. С. 28—42.

2. *Малаховский В.С.* Инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразий плоских алгебраических элементов // ДАН СССР. 1963. Т. 152. №3. С. 550—552.

3. *Малаховский Н.В.* Компьютерное моделирование исследования дифференцируемых многообразий и ассоциированных связностей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 77—107.

V. Malakhovsky, N. Malakhovsky

FIELDS OF GEOMETRICAL OBJECTS ON m-DIMENSIONAL NONDEGENERATE MANIFOLD OF QUADRATIC ELEMENTS IN n-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE (m<n)

In n-dimensional projective space P_n an m-dimensional manifold V_m of (n-2)-dimensional nondegenerate quadrics Q_{n-2} (quad-

ratic elements) $\left(n \geq 3, m < n\right)$ is considered, in the assumption, that hyperplanes of quadrics also form *m*-parametrical family, and that the characteristic of a hyperplane is not intersect with its polar subspace relative to Q_{n-2}.

Using computer program of finding of continuations and scopes of fields of geometrical objects on differentiable manifold, tensor and quasitensor fields on V_m are found and geometrical images determined by them are considered. For every $Q_{n-2} \in V_m$ two invariant points are found in P_n which determine on V_m two invariant equipments.

УДК 514.756.2

А. М. Матвеева

(Чувашский государственный педагогический университет)

КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СФЕРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Дается понятие сферического распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов конформного пространства C_n, и изучаются некоторые вопросы дифференциальной геометрии указанного распределения.

Во всей работе индексы принимают следующие значения: $K, L = \overline{1, n}$; $i, j, k, s, t = \overline{1, n-1}$; $\bar{i} = \overline{0, n-1}$; $\alpha = 0, n$.

1. В конформном пространстве C_n рассмотрим распределения [2] $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ $(n–1)$-мерных и одномерных линейных элементов $\left(A_0, L_{n-1}\right)$ и $\left(A_0, L_1\right)$ соответственно; при этом будем