9. *Stepanova L. V., Banaru M. B.* On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds // Analele Stiintifice ale Universitatii «Al. I. Cuza». Iasi, 2001. T. 47, №1. P. 65—70.

10. *Abu-Saleem A., Banaru M.* Some applications of Kirichenko tensors // Analele Univ. Oradea, 2010. T. 17, №2. P. 201—208.

11. *Banaru M.* On the Gray-Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire de l'universite de Sofia «St. Kl. Ohridski». Math., 2004. T. 95. P. 125—131.

12. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

*M. Banaru*

## On almost contact metric hypersurfaces of 6-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra

It is proved that 2-hypersurfaces in 6-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra admit non-Sasaki and non-Kenmotsu almost contact metric structures.

УДК 514.76

***К. В. Башашина***
*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*
baschaschina@mail.ru

## Редукция аффинной связности многообразия к фундаментально-групповой связности подмногообразия

В n-мерном гладком многообразии $V_n$ задан объект аффинной связности способом Лаптева — Лумисте. Рассмотрено подмногообразие $V_m$, которое представлено как семейство меньшей размерности, описанное точкой многообразия $V_n$. В рас-

слоении, ассоциированном с гладким подмногообразием, задана фундаментально-групповая связность. Показано, что объект аффинной связности редуцируется к объекту фундаментально-групповой связности.

***Ключевые слова:*** аффинная связность, гладкое подмногообразие, объект кривизны, объект кручения, формы связности, фундаментально-групповая связность.

**1. Задание аффинной связности 1-го порядка.** Рассмотрим $n$-мерное гладкое многообразие $V_n$ со структурными уравнениями

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad (I, \quad J, \quad K = \overline{1, \quad n}), \tag{1.1}$$

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I, \ (\omega_{JK}^I \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0) \tag{1.2}$$

и деривационными формулами

$$dA = \omega^I e_I, \ de_I = \omega_I^J e_J + \omega^J e_{IJ} \quad (e_{IJ} = e_{JI}). \tag{1.3}$$

Исследуем связность в расслоении реперов 1-го порядка $L(V_n)$ со структурными уравнениями (1.1, 1.2), типовым слоем которого служит линейная группа $L_{n^2}$ $=GL(n)$, действующая в касательном пространстве $T_n$ к многообразию $V_n$ в точке $A$, фиксируемой вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^I = 0$. Такую связность будем называть аффинной [1]. Связность в главном расслоении $L(V_n)$ задается способом Лаптева — Лумисте [2] с помощью форм

$$\varpi_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K, \tag{1.4}$$

где $\Gamma_{\mathrm{JK}}^{\mathrm{I}}$ — некоторые функции, дифференциальные уравнения которых будут получены ниже. Внешние дифференциалы форм (1.4) приводятся к виду

$$d\varpi_J^I = \varpi_J^K \wedge \varpi_K^I + \omega^K \wedge (\Delta\Gamma_{JK}^I + \omega_{JK}^I) - \Gamma_{JK}^M \Gamma_{ML}^I \omega^K \wedge \omega^L, \tag{1.5}$$

причем дифференциальный оператор $\Delta$ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^I_{JK} = d\Gamma^I_{JK} - \Gamma^I_{JL}\omega^L_K - \Gamma^I_{LK}\omega^L_J + \Gamma^L_{JK}\omega^I_L .$$

Преобразуем выражение (1.5) так, чтобы внешние дифференциалы форм $\varpi$ выражались через них самих и линейные комбинации базисных форм. Для этого выражения, стоящие в скобках, запишем в виде

$$\Delta\Gamma^I_{JK} + \omega^I_{JK} = \Gamma^I_{JKL}\omega^L . \qquad (1.6)$$

Учитывая (1.6) в системе (1.5), запишем структурные уравнения форм аффинной связности (1.4) в виде

$$d\varpi^I_J = \varpi^K_J \wedge \varpi^I_K + R^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L , \qquad (1.7)$$

$$R^I_{JKL} = \Gamma^I_{J[KL]} - \Gamma^M_{J[K}\Gamma^I_{ML]} . \qquad (1.8)$$

**Утверждение 1.** *Аффинная связность в расслоении реперов $L(V_n)$ задается с помощью объекта связности $\Gamma^I_{JK}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (1.6) и определяет формы связности $\varpi^I_J$, подчиненные структурным уравнениям (1.7), в которые входит объект кривизны аффинной связности $R^I_{JKL}$, определяемый формулами (1.8).*

Внося формы аффинной связности (1.4) в структурные уравнения (1.1), получим

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \varpi^I_J + S^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K ,$$

где $S^I_{JK} = \Gamma^I_{[JK]}$ — объект кручения аффинной связности.

Альтернируя уравнения (1.6), получим $\Delta S^I_{JK} \cong 0$, где символ $\cong$ означает сравнение по модулю базисных форм $\omega^I$.

**Утверждение 2.** *Кручение $S^I_{JK}$ аффинной связности, задаваемой объектом $\Gamma^I_{JK}$, является тензором.*

Продолжая уравнения (1.6), найдем

$$\Delta\Gamma^I_{JKL} - \Gamma^I_{JM}\omega^M_{KL} - \Gamma^I_{MK}\omega^M_{JL} + \Gamma^M_{JK}\omega^I_{ML} + \omega^I_{JKL} \cong 0,$$

откуда с помощью уравнений (1.6) и формул (1.7) получим $\Delta R^I_{JKL} \cong 0$.

**Утверждение 3.** *Объект кривизны $R^I_{JKL}$ аффинной связности является тензором.*

**2. Связность в расслоении, ассоциированном с подмногообразием.** Пусть в многообразии $V_n$ дано подмногообразие $V_m$. Произведем разбиение значения индексов на две серии:

$$I=(i, a);\ i, j, k=\overline{1,m};\ a,b,c=\overline{m+1,n}.$$

Подмногообразие $V_m$ представим как $m$-параметрическое семейство, описанное точкой $A$ многообразия $V_n$. Ввиду такого представления можно считать, что $\omega^i$ — линейно независимые формы, а формы $\omega^a$ линейно выражаются через базисные формы

$$\omega^a = \Lambda^a_i\omega^i, \tag{2.1}$$

где $\Lambda^a_i$ — функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Lambda^a_i - \Lambda^b_i\Lambda^a_j\theta^j_b + \theta^a_i = \Lambda^a_{ij}\omega^j \quad (\Delta\Lambda^a_i = \partial\Lambda^a_i - \Lambda^a_j\theta^j_i + \Lambda^b_i\theta^a_b), \tag{2.2}$$

причем $\Lambda^a_{ij}$ являются симметричными по нижним индексам, $\theta = \omega|_{V_m}$, $\partial$ — символ дифференцирования вдоль подмногообразия $V_m$. Согласно методу Г. Ф. Лаптева [3] геометрический объект $\Lambda^a_i$ называется фундаментальным объектом первого порядка подмногообразия $V_m$. Деривационная формула ($1.3_1$) для точки $A \in V_m \subset V_n$, смещающейся вдоль подмногообразия $V_m$, принимает вид

$$\partial A = \omega^i\varepsilon_i, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_i = e_i + \Lambda_i^a e_a. \tag{2.4}$$

Произведем частичную канонизацию подвижного репера $\{e_i,\ e_a\}$ касательного пространства $T_n$, помещая векторы $e_i$ в касательное подпространство $T_m$. Такой репер служит репером первого порядка подмногообразия $V_m$. Тогда из обозначений (2.4) следует

$$\Lambda_i^a = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_i = e_i\,.$$

В этом случае соотношения (2.1), (2.2) упрощаются

$$\theta^a = 0,\ \ \theta_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j\,. \tag{2.5}$$

Продолжая дифференциальные уравнения ($2.5_2$), получим

$$\Delta\Lambda_{ij}^a + \theta_{ij}^a = \Lambda_{ijk}^a \omega^k\,,\ \Lambda_{i[jk]}^a = 0\,. \tag{2.6}$$

Фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G(V_m)$ со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \theta_j^i\,, \tag{2.7}$$

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \omega^k \wedge \vartheta_{jk}^i\ \ (\vartheta_{ij}^k = \theta_{ij}^k + \Lambda_{ij}^a \theta_a^k)\,, \tag{2.8}$$

$$d\theta_b^a = \theta_b^c \wedge \theta_c^a + \omega^i \wedge \vartheta_{bi}^a\ \ (\vartheta_{bi}^a = \theta_{bi}^a - \Lambda_{ji}^a \theta_b^j)\,, \tag{2.9}$$

$$d\theta_a^i = \theta_a^j \wedge \theta_j^i + \theta_a^b \wedge \theta_b^i + \omega^j \wedge \theta_{aj}^i\,, \tag{2.10}$$

где $G$ — подгруппа стационарности подпространства $T_m$ в пространстве $T_n$, задается с помощью форм

$$\Omega_j^i = \theta_j^i - \Pi_{jk}^i \omega^k\,,\ \Omega_b^a = \theta_b^a - \Pi_{bi}^a \omega^i\,,\ \Omega_a^i = \theta_a^i - \Pi_{aj}^i \omega^j\,, \tag{2.11}$$

где функции $\Pi_{jk}^i$, $\Pi_{bi}^a$, $\Pi_{aj}^i$ удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, которые будут найдены ниже. Внешние дифференциалы форм (2.11) имеют следующий вид:

$$d\Omega_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \omega^k \wedge (d\Pi_{jk}^i - \Pi_{jl}^i \theta_k^l + \vartheta_{jk}^i)\,,$$

$$d\Omega_b^a = \theta_b^c \wedge \theta_c^a + \omega^i \wedge (d\Pi_{bi}^a - \Pi_{bj}^a \theta_i^j + \vartheta_{bi}^a),$$

$$d\Omega_a^i = \theta_a^j \wedge \theta_j^i + \theta_a^b \wedge \theta_b^i + \omega^j \wedge (d\Pi_{aj}^i - \Pi_{ak}^i \theta_j^k + \theta_{aj}^i).$$

Введем в эти уравнения формы (2.11)

$$d\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + \Pi_{jl}^k \omega^l \wedge \Omega_k^i + \Omega_j^k \wedge \Pi_{km}^i \omega^m +$$

$$+ \Pi_{jl}^k \omega^l \wedge \Pi_{km}^i \omega^m + \omega^k \wedge (d\Pi_{jk}^i - \Pi_{jl}^i \theta_k^l + \vartheta_{jk}^i),$$

$$d\Omega_b^a = \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \Pi_{bi}^c \omega^i \wedge \Omega_c^a + \Omega_b^c \wedge \Pi_{cj}^a \omega^j +$$

$$+ \Pi_{bi}^c \omega^i \wedge \Pi_{cj}^a \omega^j + \omega^i \wedge (d\Pi_{bi}^a - \Pi_{bj}^a \theta_i^j + \vartheta_{bi}^a),$$

$$d\Omega_a^i = \Omega_a^j \wedge \Omega_j^i + \Pi_{ak}^j \omega^k \wedge \Omega_j^i + \Omega_a^j \wedge \Pi_{jl}^i \omega^l + \Pi_{ak}^j \omega^k \wedge \Pi_{jl}^i \omega^l +$$

$$+ \Omega_a^b \wedge \Omega_b^i + \Pi_{aj}^b \omega^j \wedge \Omega_b^i + \Omega_a^b \wedge \Pi_{bk}^i \omega^k + \Pi_{aj}^b \omega^j \wedge \Pi_{bk}^i \omega^k +$$

$$+ \omega^j \wedge (\mathrm{d}\,\Pi_{aj}^i — \Pi_{ak}^i \theta_j^k + \theta_{aj}^i).$$

В слагаемые, содержащие лишь одну из форм (2.11), подставим выражение этой формы

$$d\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + \omega^k \wedge (\Delta\Pi_{jk}^i + \vartheta_{jk}^i) - \Pi_{jl}^k \omega^l \wedge \Pi_{km}^i \omega^m,$$

$$d\Omega_b^a = \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \omega^i \wedge (\Delta\Pi_{bi}^a + \vartheta_{bi}^a) - \Pi_{bi}^c \omega^i \wedge \Pi_{cj}^a \omega^j, \qquad (2.12)$$

$$d\Omega_a^i = \Omega_a^j \wedge \Omega_j^i + \Omega_a^b \wedge \Omega_b^i + \omega^j \wedge (\Delta\Pi_{aj}^i - \Pi_{kj}^i \theta_a^k + \Pi_{aj}^b \theta_b^i + \theta_{aj}^i) -$$

$$- \Pi_{ak}^j \omega^k \wedge \Pi_{jl}^i \omega^l - \Pi_{aj}^b \omega^j \wedge \Pi_{bk}^i \omega^k.$$

Согласно теореме Картана — Лаптева формы (2.11) являются формами связности, когда их внешние дифференциалы есть суммы внешних произведений этих форм и внешних произведений базисных форм. Значит, выражения в круглых скобках должны быть линейными комбинациями базисных форм

$$\Delta\Pi^i_{jk} + \vartheta^i_{jk} = \Pi^i_{jkl}\omega^l, \quad \Delta\Pi^a_{bi} + \vartheta^a_{bi} = \Pi^a_{bij}\omega^j,$$
$$\Delta\Pi^i_{aj} - \Pi^i_{kj}\theta^k_a + \Pi^b_{aj}\theta^i_b + \theta^i_{aj} = \Pi^i_{ajk}\omega^k. \qquad (2.13)$$

**Определение.** Назовем *G-связностью* [3] связность в ассоциированном расслоении $G(X_m)$, задаваемую объектом связности $\Pi = \{\Pi^i_{jk}, \Pi^a_{bi}, \Pi^i_{aj}\}$.

Учитывая дифференциальные уравнения (2.13) компонент объекта $G$-связности $\Pi$ в выражениях (2.12), получим

$$d\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + R^i_{jkl}\ \omega^k \wedge \omega^l, \ d\Omega^a_b = \Omega^c_b \wedge \Omega^a_c + R^a_{bij}\ \omega^i \wedge \omega^j,$$

$$d\Omega^i_a = \Omega^j_a \wedge \Omega^i_j + \Omega^b_a \wedge \Omega^i_b + R^i_{ajk}\ \omega^j \wedge \omega^k,$$

где компоненты объекта кривизны $G$-связности $R = \{R^i_{jkl}, R^a_{bij}, R^i_{ajk}\}$ выражаются по формулам

$$R^i_{jkl} = \Pi^i_{j[kl]} - \Pi^m_{j[k}\Pi^i_{ml]}, \ R^a_{bij} = \Pi^a_{b[ij]} - \Pi^c_{b[i}\Pi^a_{cj]},$$

$$R^i_{ajk} = \Pi^i_{a[jk]} - \Pi^l_{a[j}\Pi^i_{lk]} - \Pi^b_{a[j}\Pi^i_{bk]}.$$

**3. Редукция объекта аффинной связности к объекту фундаментально-групповой связности.** Представим часть дифференциальных уравнений (1.6) компонент объекта аффинной связности $\Gamma$ в подробном виде, соответствующем компонентам объекта фундаментально-групповой связности $\Pi$ и объекту $\Lambda^a_{ij}$:

$$d\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k - \Gamma^i_{ja}\omega^a_k - \Gamma^i_{ak}\omega^a_j - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j +$$
$$+ \Gamma^l_{jk}\omega^i_l + \Gamma^a_{jk}\omega^i_a + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkL}\omega^L, \qquad (3.1)$$

$$d\Gamma^i_{aj} - \Gamma^i_{ak}\omega^k_j - \Gamma^i_{ab}\omega^b_j - \Gamma^i_{kj}\omega^k_a - \Gamma^i_{bj}\omega^b_a +$$
$$+ \Gamma^k_{aj}\omega^i_k + \Gamma^b_{aj}\omega^i_b + \omega^i_{aj} = \Gamma^i_{ajK}\omega^K, \qquad (3.2)$$

$$\begin{gathered} d\Gamma^a_{bi} - \Gamma^a_{bj}\omega^j_i - \Gamma^a_{bc}\omega^c_i - \Gamma^a_{ji}\omega^j_b - \Gamma^a_{ci}\omega^c_b + \\ + \Gamma^j_{bi}\omega^a_j + \Gamma^c_{bi}\omega^a_c + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{biJ}\omega^J , \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} d\Gamma^a_{ij} - \Gamma^a_{ik}\omega^k_j - \Gamma^a_{ib}\omega^b_j - \Gamma^a_{kj}\omega^k_i - \Gamma^a_{bj}\omega^b_i + \\ + \Gamma^k_{ij}\omega^a_k + \Gamma^b_{ij}\omega^a_b + \omega^a_{ij} = \Gamma^a_{ijK}\omega^K . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Воспользуемся уравнениями (2.5) подмногообразия $V_m$ в дифференциальных уравнениях (3.1—3.4)

$$\Delta\overline{\Gamma}^i_{jk} + \overline{\Gamma}^a_{jk}\theta^i_a + \theta^i_{jk} = \widetilde{\Gamma}^i_{jkl}\omega^l , \tag{3.5}$$

$$\Delta\overline{\Gamma}^i_{aj} - \overline{\Gamma}^i_{kj}\theta^k_a + \overline{\Gamma}^b_{aj}\theta^i_b + \theta^i_{aj} = \widetilde{\Gamma}^i_{ajk}\omega^k , \tag{3.6}$$

$$\Delta\overline{\Gamma}^a_{bi} + \theta^a_{bi} - \overline{\Gamma}^a_{ji}\theta^j_b = \widetilde{\Gamma}^a_{bij}\omega^j , \tag{3.7}$$

$$\Delta\overline{\Gamma}^a_{ij} + \theta^a_{ij} = \widetilde{\Gamma}^a_{ijk}\omega^k , \tag{3.8}$$

где $\overline{\Gamma} = \Gamma\big|_{V_m}$, а преобразованные пфаффовы производные имеют вид

$$\begin{gathered} \widetilde{\Gamma}^i_{jkl} = \overline{\Gamma}^i_{jkl} + \Lambda^a_{kl}\overline{\Gamma}^i_{ja} + \Lambda^a_{jl}\overline{\Gamma}^i_{ak}, \ \widetilde{\Gamma}^i_{ajk} = \overline{\Gamma}^i_{ajk} + \Lambda^b_{jk}\overline{\Gamma}^i_{ab}, \\ \widetilde{\Gamma}^a_{bij} = \overline{\Gamma}^a_{bij} + \Lambda^c_{ij}\overline{\Gamma}^a_{bc} - \Lambda^a_{kj}\overline{\Gamma}^k_{bi}, \ \widetilde{\Gamma}^a_{ijk} = \overline{\Gamma}^a_{ijk} + \Lambda^b_{jk}\overline{\Gamma}^a_{ib} + \Lambda^b_{ik}\overline{\Gamma}^a_{bj} - \Lambda^a_{lk}\overline{\Gamma}^l_{ij} . \end{gathered} \tag{3.9}$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (2.6) и (3.8), положим

$$\overline{\Gamma}^a_{ij} = \Lambda^a_{ij} . \tag{3.10}$$

Из тождества (2.6$_2$) следует условие

$$\widetilde{\Gamma}^a_{i[jk]} = \overline{\Gamma}^a_{i[jk]} + \overline{\Gamma}^a_{b[j}\Lambda^b_{ik]} - \overline{\Gamma}^l_{i[j}\Lambda^a_{lk]} = 0 .$$

Таким образом, компоненты $\Gamma_{ij}^{a}$ объекта аффинной связности $\Gamma$, ограниченные на подмногообразие $V_m$, охвачены в случае данного подмногообразия $V_m$.

**Вывод.** *Сопоставляя дифференциальные уравнения (2.13) и (3.5—3.7), с учетом (3.10) есть основания заключить, что объект* $\overline{\Gamma}_0 = \{\overline{\Gamma}_{jk}^{i}, \overline{\Gamma}_{aj}^{i}, \overline{\Gamma}_{bi}^{a}\}$ *можно отождествить с объектом связности $\Pi$ (см.: [4, с. 36—37]).*

### *Список литературы*

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара. ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

*K. Bashashina*

## Reduction of affine connection of manifold to fundamental-group connection of submanifold

The object of affine connection is defined by Laptev—Lumiste way in n-dimensional smooth manifold $V_n$. The submanifold $V_m$, which is represented as an assemblage of smaller dimension, described by a point of the manifold $V_n$ is considered. In the bundle associated to the smooth submanifold fundamental-group connection is set. It is shown that the object of an affine connection reduces to a fundamental-group connection.