ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2

ШЕВЧЕНКО Ю.И.

КОНГРУЭНЦИОИД ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ГИПЕРЦИЛИНДРОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В $(n+1)$- мерном аффинном пространстве рассмотрено n-п раметрическое многообразие (конгруэнциоид $\mathfrak{M}_n$) центральных вырожденных квадратичных гиперцилиндров (каждый гиперцилинд имеет единственную ось). Найден основной объект конгруэнциоида Исследованы различные охватываемые им объекты: тензоры, квазит зоры, инварианты, инвариантные дифференциальные формы. Наиболе подробно изучен случай $n=2$ (когда конгруэнциоид является ко груэнцией).

§ I. Поля геометрических объектов конгруэнциоида $\mathfrak{M}_n$.

Рассмотрим в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве конгр циоид гиперцилиндров $\mathfrak{M}_n$. Вершину A подвижного репера $\{A; \bar e$ поместим на ось образующего гиперцилиндра; вектор $\bar e_{n+1}$ напр по оси. Тогда уравнение гиперцилиндра запишется в виде:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - 1 = 0. \quad (\alpha,\beta,\gamma,\ldots=1,2,\ldots,n),$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}, \quad \det(a_{\alpha\beta})\neq 0.$$

оложим

$$\Theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta - a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha. \tag{1.3}$$

истема уравнений стационарности гиперцилиндра имеет вид:

$$\overset{\circ}{\Theta}_{\alpha\beta}=0, \quad \pi^\alpha=0, \quad \pi^\alpha_{n+1}=0, \tag{1.4}$$

е нолик над формой Пфаффа или символом означает фиксацию пер чных параметров.

Примем формы ω^α за независимые формы конгруэнциоида $\mathfrak{M}_n$, гда система дифференциальных уравнений конгруэнциоида $\mathfrak{M}_n$ за шется в виде:

$$\omega^\alpha_{n+1}=\Gamma^\alpha_\gamma\omega^\gamma, \quad \Theta_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma. \tag{1.5}$$

Продолжая (I.5) и фиксируя первичные параметры, получим:

$$\delta\Gamma^\alpha_\gamma = \overset{\circ}{\nabla}\Gamma^\alpha_\gamma + \Gamma^\alpha_\gamma\pi^{n+1}_{n+1} - \Gamma^\alpha_\eta\Gamma^\eta_\gamma\pi^{n+1},$$

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \overset{\circ}{\nabla}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\eta}\Gamma^\eta_\gamma\pi^{n+1} - \Gamma^\eta_\gamma(a_{\alpha\eta}\pi^{n+1}_\beta + a_{\eta\beta}\pi^{n+1}_\alpha). \tag{1.6}$$

(I.4) имеем:

$$\delta a_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\nabla} a_{\alpha\beta}. \tag{1.7}$$

Теорема. Фундаментальный объект первого порядка

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, \Gamma^\alpha_\gamma, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\}$$

ляется основным объектом конгруэнциоида $\mathfrak{M}_n$.

Доказательство. Из определения основного объек [2] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость стемы дифференциальных уравнений (I.6,7) относительно всех оричных форм хотя бы при некоторых начальных значениях компо нт Γ_1 (начальные значения будем обозначать знаком $\sim$ сверху).

Положим:

$$\tilde a_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}, \tilde\Gamma_{\alpha\beta 1}=\delta_{\alpha\beta}, \tilde\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=0 \quad \text{при } \gamma>1;$$

$$\tilde\Gamma^\alpha_\beta = \alpha\delta^\alpha_\beta \quad \text{(по } \alpha \text{ не суммировать!)}$$

Из уравнений (I.6), (I.7) находим:

$$2\tilde\pi^\alpha_\alpha = \delta\tilde a_{\alpha\alpha} \quad \text{(по } \alpha \text{ не суммировать!)},$$

$$(\alpha-\beta)\tilde\pi^\alpha_\beta = \delta\tilde\Gamma^\alpha_\beta \quad (\alpha\neq\beta),$$
$$\tilde\pi^{n+1} = \tilde\pi^1_1 + 2\tilde\pi^2_2 - \delta\tilde\Gamma_{221},$$
$$\tilde\pi^{n+1}_{n+1} = \delta\tilde\Gamma^1_1 + \tilde\pi^{n+1},$$
$$\tilde\pi^{n+1}_\alpha = \delta\tilde a_{1\alpha} - \delta\tilde\Gamma_{1\alpha 1} \quad \text{при } \alpha>1,$$
$$2\tilde\pi^{n+1}_1 = 3\tilde\pi^1_1 - \tilde\pi^{n+1} - \delta\tilde\Gamma_{111}.$$

Следствие. Надлежащее задание компонент фундамен ного объекта второго порядка

$$\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma},\Gamma_{\alpha\beta\gamma\eta}\}$$

определяет конгруэнцоид $\mathfrak{M}_n$ с точностью до постоянных [2].

Из (I.7) видно, что система величин $\{a_{\alpha\beta}\}$ образует тензо

Система приведенных миноров $\{a^{\alpha\beta}\}$ матрицы $(a_{\alpha\beta})$ является т ром, так как

$$\delta a^{\alpha\beta} = \mathring\nabla a^{\alpha\beta} \quad ($$

Рассмотрим: $\Gamma = |\Gamma^\alpha_\beta|$, $\delta\Gamma = \Gamma(n\pi^{n+1}_{n+1} - \Gamma^\eta_\eta\pi^{n+1}).$ (

Будем предполагать $\Gamma\neq 0.$ (

Система приведенных миноров $\{\tilde\Gamma^\alpha_\beta\}$ матрицы (Γ^α_β) образует к тензор, так как

$$\delta\tilde\Gamma^\alpha_\beta = \mathring\nabla\tilde\Gamma^\alpha_\beta - \tilde\Gamma^\alpha_\beta\pi^{n+1}_{n+1} + \delta^\alpha_\beta\pi^{n+1}. \quad ($$

Изучим следующие системы величин и законы их инфините ных изменений по вторичным параметрам:

$$\tilde\Gamma = \tilde\Gamma^\eta_\eta, \quad \delta\tilde\Gamma = -\tilde\Gamma\pi^{n+1}_{n+1} + n\pi^{n+1};$$
$$\hat q_{\alpha\beta} = \frac12(q_{\alpha\beta}+q_{\beta\alpha}), \quad \delta\hat q_{\alpha\beta} = \mathring\nabla\hat q_{\alpha\beta} - \hat q_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1},$$
$$q_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma}\left(\tilde\Gamma^\gamma_\beta - \frac1n\delta^\gamma_\beta\tilde\Gamma\right);$$

$$q_\alpha = \Gamma_{\alpha\gamma\eta}\tilde\Gamma^\eta_\zeta a^{\zeta\gamma}, \quad \delta q_\alpha = \mathring\nabla q_\alpha - q_\alpha\pi^{n+1}_{n+1} - (n+1)\pi^{n+1}_\alpha; \qquad (1.14)$$
$$r_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\eta}\tilde\Gamma^\eta_\gamma - \frac1{n+1}(q_\alpha a_{\beta\gamma} + q_\beta a_{\alpha\gamma}),$$
$$\hat r_{\alpha\beta\gamma} = \frac13(r_{\alpha\beta\gamma}+r_{\alpha\gamma\beta}+r_{\gamma\beta\alpha}), \qquad (1.15)$$
$$\delta\hat r_{\alpha\beta\gamma} = \mathring\nabla\hat r_{\alpha\beta\gamma} - \hat r_{\alpha\beta\gamma}\pi^{n+1}_{n+1};$$
$$r_\alpha = r_{\gamma\alpha\zeta}a^{\zeta\gamma}, \quad \delta r_\alpha = \mathring\nabla r_\alpha - r_\alpha\pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (1.16)$$
$$r^\alpha = a^{\alpha\eta}a^{\zeta\gamma}r_{\gamma\eta\zeta}, \quad \delta r^\alpha = \mathring\nabla r^\alpha - r^\alpha\pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (1.17)$$
$$a=|a_{\alpha\beta}|, \quad \delta a = 2a\pi^\eta_\eta; \qquad (1.18)$$
$$q = |q_{\alpha\beta}|, \quad \delta q = -qn\pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (1.19)$$
$$r = r_\alpha r^\alpha, \quad \delta r = -2r\pi^{n+1}_{n+1}; \qquad (1.20)$$
$$c = \ln\frac{r^n}{q^2} \quad (q\neq 0), \quad \delta c = 0; \qquad (1.21)$$
$$v_\alpha = \Gamma^\gamma_\alpha r_\gamma, \quad \delta v_\alpha = v_\eta(\pi^\eta_\alpha - \Gamma^\eta_\alpha\pi^{n+1}); \qquad (1.22)$$
$$w_\alpha = r^\eta\left(r^\zeta\Gamma_{\eta\zeta\alpha} - \frac2{n+1}q_\eta v_\alpha\right), \qquad (1.23)$$
$$\delta w_\alpha = w_\eta(\pi^\eta_\alpha - \Gamma^\eta_\alpha\pi^{n+1}) - 2w_\alpha\pi^{n+1}_{n+1}.$$

Квазиотносительный инвариант $\tilde\Gamma$ определяет инвариантную точку $J(0,\dots,0,-\frac1n\tilde\Gamma)$; тензор $\hat q_{\alpha\beta}$ —квадратичный ги- рцилиндр:

$$\hat q_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0. \qquad (1.24)$$

азитензор q_α совместно с $\tilde\Gamma$ —гиперплоскость (ψ—гипер- оскость):

$$nq_\alpha x^\alpha - n(n+1)x^{n+1} - (n+1)\widetilde{\Gamma} = 0; \qquad (1.$$

тензор $\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ —кубический гиперцилиндр:

$$\hat{\tau}_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0; \qquad (1$$

тензор τ_α —гиперплоскость:

$$\tau_\alpha x^\alpha = 0$$

Из (I.9),(I.18)-(I.21) следует,что Γ, a, q, τ — относительн инварианты, C —абсолютный инвариант. Дифференциальная форма $\Omega_1 = V_\alpha \omega^\alpha$ является абсолютно инвариантной,а форма $\Omega_2 =$ относительно инвариантной.

§2.Конгруэнция $\mathfrak{M}_2$ цилиндров в эквиаффинном 3 -пространстве.

Рассмотрим случай $n=2$ в эквиаффинном пространстве.Кано ческий репер построим следующим образом:начало A поместим точку J ,концы B_α векторов $\bar{e}_\alpha$ поместим в фокусы направл щей (ψ—направляющей),лежащей в ψ—плоскости.Уравнение (I примет вид:

$$(x^1)^2+2px^1x^2+(x^2)^2-1=0, \quad p^2\neq 1. \qquad ($$

Фокальные точки и фокальные семейства конгруэнции ψ-на ляющих определяются системой уравнений:

$$(x^1)^2+2px^1x^2+(x^2)^2-1=0, \quad x^3=0,$$

$$d[(x^1)^2+2px^1x^2+(x^2)^2]=0, \quad dx^3=0.$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением одного из классов груэнции $\mathfrak{M}_2$,когда:

I)направления векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены,

2)касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с ψ костью,

3)ось цилиндра вдоль линий $\omega^\alpha=0$ описывает торсы,

4)поверхность (B_α) является огибающей плоскостей $\{\bar{e}_\beta, \bar{e}$

Из этих условий следует:

$$p=0, \quad \Gamma_1^2=\Gamma_2^1=0, \tag{2.3}$$

$$\omega^3=0, \quad \omega^\alpha+\omega^\alpha_\alpha=0 \tag{2.4}$$

(по α не суммировать!).

Уравнения конгруэнции $\mathfrak{M}_2$ примут вид

$$\omega_3^\alpha=\Gamma^\alpha_\gamma\omega^\gamma, \quad \omega^3_\alpha = S_{\alpha\gamma}\omega^\gamma, \quad \omega^\beta_\alpha = g^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma \quad (\alpha\neq\beta). \tag{2.5}$$

мыкая уравнения (2.4,5),получим

$$S_{12}=S_{21}\overset{df}{=}S, \tag{2.6}$$

е связи и шесть основных квадратичных уравнений,общий вид ко рых неинтересен.Откуда следует,что наш класс конгруэнции $\mathfrak{M}_2$ ределен с произволом одной функции двух аргументов.

Найдем фокусы и торсы конгруэнции осей цилиндра в общем виде:

$$\bar{F}=\bar{A}+t\bar{e}_3, \quad t^2\Gamma+t(\Gamma_1^1+\Gamma_2^2)+1=0,$$

$$(\omega^1)^2\Gamma_1^2+\omega^1\omega^2(\Gamma_2^2-\Gamma_1^1)-(\omega^2)^2\Gamma_2^1=0. \tag{2.7}$$

куда видно,что нелинейный геометрический объект Γ^α_β в случае 2 характеризует фокусы и торсы конгруэнции осей цилиндра, редположение (I.10) соответствует непараболичности этой груэнции.

Рассматриваемый класс имеет следующие свойства:

I)характеристическая точка плоскости $\{\bar{e}_\alpha,\bar{e}_3\}$ лежит на оси индра,

2)точка A является фокусом прямолинейных конгруэнций $\{\bar{e}_1\}$ $\{\bar{e}_2\}$.

О п р е д е л е н и е . Будем говорить,что тройка прямолиней конгруэнций внешне расслояема,если существуют односторонние слоения от одной конгруэнции к двум другим.

Решим задачу о внешнем расслоении прямолинейных конгруэнций: $\{\bar{e}_3\}$ к касательным в фокусах B_α к ψ—направляющей.Конеч соотношения,соответствующие этой задаче,вместе с двумя связями имеют вид:

$$\Gamma^2_2 = \Gamma^1_1 \overset{df}{=} \mathcal{L}, \; q^1_{21} = q^2_{12} = 0, \; S = \frac{1}{\mathcal{L}} q^2_{11} q^1_{22}, \qquad (2$$

причем $S \neq 0$, так как в противном нарушается биективное соотве
вие между лучами прямолинейных конгруэнций.

Подставляя значения (2.8) в (2.5) и замыкая первые два ур
ния, получим:

$$\mathcal{L} = \mathrm{Const}. \qquad (2$$

Следовательно, конгруэнция цилиндров, допускающая индуциров
ное внешнее расслоение, существует с произволом четырех функ
одного аргумента.

Л и т е р а т у р а

I. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в
мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып
Труды Томского ун-та, т.I68, стр.28-42, I963.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многоо
зий, Труды Московского математического общества, 2, I953, ГИТТ

3. В.С.Малаховский, Конгруэнция парабол в эквиаффинной геоме
Геометрический сб., вып.2, Труды Томского ун-та, I962, I6I, 76-

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 I97I

С В Е Ш Н И К О В А Г.Л.

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются конгру-
нции коник [I], три фокальных поверхности которых вырождаются
линии и точки. Конгруэнцией $[h, k]$ называется конгруэнция коник,
которой h фокальных поверхностей вырождаются в линии, k фо-
альных поверхностей вырождаются в точки. Исследованы конгруэнции
3,0], [2,I], [I,2].

§ I. Конгруэнции [3,0].

Пусть фокальные поверхности $(A_{\alpha'})$ $(\alpha' = 1,2,3)$ конгруэнции
оник C вырождаются в линии, причем касательные ℓ_i $(i,j,k = 1,2)$
линиям (A_i) в точках A_i не инцидентны плоскости коники.

Отнесем конгруэнцию [3,0] к реперу $R \equiv \{A_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$,
де A_4 – точка, лежащая вне плоскости коники. Инфинитезимальные
еремещения репера R определяются деривационными формулами:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega^\beta_\alpha \bar{A}_\beta,$$

ричем пфаффовы формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры: