ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

И в л е в Е.Т.

ОБ ОДНОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ.

В пространстве проективной связности $P_{n,n}$ геометрически строятся нормали первого и второго рода в смысле Нордена А.П. m -поверхности S_m с заданным полем гиперплоскостей, проходящих через соответствующие m -плоскости L_m, касательные к S_m.

§I. Аналитический аппарат.

Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,n}$ с n -мерной базой и n -мерными слоями P_n, определенное формами ω_J^K, которые подчинены следующим структурным уравнениям

$$D\omega_K^J = \omega_K^L \wedge \omega_L^J + R^J_{Kij}\,\omega^i \wedge \omega^j,$$

$$\omega_L^L = 0 \tag{1}$$

$(J,K,L,M = 0,1,\dots,n;\quad i,j,k,l = 1,\dots,n)$

Это пространство является расслоенным пространством, базой которого служит n -мерное дифференцируемое многообразие. Локальные координаты $u^1,\dots,u^n$ точки A базы являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы форм ω^i. Слоем (u), соответствующим точке A базы, является n -мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $T=\{A_0(u), A_1(u),\dots, A_n(u)\}$. При этом I-формы ω_J^K определяют главную линейную часть отображения локального проективного пространства $P_n(u+du)$ точки $A(u+du)$ базы пространства $P_{n,n}$ на исходное пространство $P_n(u)$:

$$A_J(u+du) \to A_J(u,du) \cong A_J(u) + \omega_J^K A_K(u).$$

Здесь предполагается, что $A = A_0$. В формулах (I) тензор кручения-кривизны R^K_{Jij} кососимметричен по индексам i и j.

Рассмотрим в P_n некоторую m -мерную поверхность (m -поверхность) S_m, текущей точкой которой является точка A_0. Тогда дифференциальные уравнения m -поверхности S_m можно записать в виде:

$$\omega_0^{\hat\alpha} = \Lambda_\alpha^{\hat\alpha}\,\omega_0^\alpha,\quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\mu = 1,\dots,m;\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\sigma,\hat\mu = m+1,\dots,n) \tag{2}$$

$$\Delta\Lambda_\beta^{\hat\alpha} \wedge \omega_0^\beta = 0, \tag{3}$$

где

$$\Delta\Lambda^{\hat i}_{\beta} = d\Lambda^{\hat i}_{\beta} - \Lambda^{\hat i}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\hat i}_{\alpha}\Lambda^{\hat\beta}_{\beta}\omega^{\alpha}_{\hat\beta} + \omega^{\hat i}_{\beta} + \Lambda^{\hat\gamma}_{\beta}\omega^{\hat i}_{\hat\gamma} -$$

$$-(\tilde R^{\hat i}_{o\alpha\beta} + \Lambda^{\hat i}_{\sigma}\tilde R^{\sigma}_{o\beta\alpha})\omega^{\alpha}_{o}, \qquad (4)$$

$$\tilde R^{i}_{o\alpha\beta} = R^{i}_{o\alpha\beta} + R^{i}_{o\alpha\hat\beta}\Lambda^{\hat\beta}_{\beta} + R^{i}_{o\hat\gamma\beta}\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha} + R^{i}_{o\hat\beta\hat\gamma}\Lambda^{\hat\beta}_{\alpha}\Lambda^{\hat\gamma}_{\beta}.$$

Здесь и в дальнейшем формы ω^{β}_{o} выбираются за базисные.

Развертывая по лемме Картана уравнения (3), получаем

$$\Delta\Lambda^{\hat i}_{\beta} = \Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{o}. \qquad (5)$$

Здесь величины $\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}$ симметричны по индексам β и γ.

Проективный репер T локального проективного пространства P_n (слоя) точки A_o m-поверхности S_m выбираем так, чтобы m-плоскость

$$L_m = (A_o A_1 \ldots A_m) \qquad (6)$$

являлась касательной m-плоскостью S_m в точке A_o. Так как при смещении точки A_o по поверхности S_m смещение её образа в исходном слое $P_n(u)$ определяется по формуле

$$A_o(u, du) - A_o(u) = \omega^{o}_{o}A_o + \omega^{\alpha}_{o}A_{\alpha} + \omega^{\hat i}_{o}A_{\hat i} + [2],$$

а главные линейные части этих смещений в слое определяют касательную m-плоскость (6) к S_m в точке A_o, то

$$\omega^{\hat i}_{o} = 0. \qquad (7)$$

Из (2) в силу (7) заключаем, что

$$\Lambda^{\hat i}_{\alpha} = 0. \qquad (8)$$

Соотношения (4) и (5) с учетом (8) дают

$$\omega^{\hat i}_{\beta} = A^{\hat i}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}, \qquad (9)$$

где

$$A^{\hat i}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma} + R^{\hat i}_{o\gamma\beta}. \qquad (10)$$

Здесь величины $\Lambda^{\hat i}_{\beta\gamma}$ симметричны, а величины $R^{\hat i}_{o\gamma\beta}$ кососимметричны по индексам β и γ.

Продолжение системы (9) приводит как и в [3](стр.112-113), к системе дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют компоненты геометрического объекта $\{A^{\hat i}_{\alpha\beta}\}$ [1]:

$$\Delta A^{\hat i}_{\beta\gamma} \equiv dA^{\hat i}_{\beta\gamma} + A^{\hat i}_{\beta\gamma}\omega^{o}_{o} - A^{\hat i}_{\sigma\gamma}\omega^{\sigma}_{\beta} - A^{\hat i}_{\beta\sigma}\omega^{\sigma}_{\gamma} + A^{\hat\gamma}_{\beta\gamma}\omega^{\hat i}_{\hat\gamma} +$$

$$+(R^{\sigma}_{o\alpha\gamma}A^{\hat i}_{\beta\sigma} + R^{\hat i}_{\beta\gamma\alpha})\omega^{\alpha}_{o} = \bar A^{\hat i}_{\beta\gamma\sigma}\omega^{\sigma}_{o}. \qquad (11)$$

Здесь величины $\bar A^{\hat i}_{\beta\gamma\sigma}$ симметричны по индексам γ и σ.

§2. Случай m-мерной гиперполосы.

1. Рассмотрим гиперплоскость, проходящую через m-плоскость (6), которая в локальных координатах репера T слоя $P_n(u)$ точки A_o определяется уравнением:

$$x^n - \ell_p x^p = 0, \quad (p, q, r = m+1, \ldots, n-1) \qquad (12)$$

Так же, как и в [2](стр.56, см.(2.10) и (2.11)), находим, что величины b_ρ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$db_\rho + b_\rho\omega^n_n - b_\rho b_q\omega^q_n - b_q\omega^q_\rho + \omega^n_\rho = b_{\rho\alpha}\omega^\alpha_0 . \qquad (13)$$

Продолжение этой системы дифференциальных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям:

$$db_{\rho\beta} + b_{\rho\beta}(\omega^0_0+\omega^n_n) - b_{\rho\gamma}\omega^\gamma_\beta - b_{q\beta}\omega^q_\rho + (A^q_{\gamma\beta}b_q - A^n_{\gamma\beta})\omega^\gamma_\rho + (A^q_{\gamma\beta}b_q - A^n_{\gamma\beta})b_\rho\omega^\gamma_n - (b_{\tau\beta}b_\rho - b_\tau b_{\rho\beta})\omega^\tau_n = \qquad (14)$$
$$= (b_{\rho\alpha}R^\alpha_{0\gamma\beta} - b_\rho R^n_{n\gamma\beta} + b_\rho b_q R^q_{n\gamma\beta} + b_q R^q_{\rho\gamma\beta} - R^n_{\rho\gamma\beta} + b_{\rho\beta\gamma})\omega^\gamma .$$

Здесь величины $b_{\rho\beta\gamma}$ симметричны по индексам β и γ.

Заметим, что система дифференциальных уравнений, состоящая из (7), (9) и (13) при условии (11) и (14) определяет в пространстве $P_{n,n}$ m-мерную гиперполосу в смысле [4], т.е. m-мерное многообразие, элемент которого состоит из точки A_0 и гиперплоскости, проходящей через плоскость L_m касательную к S_m, описываемой точкой A_0.

2. Так же, как и в [2](стр.76), кривую на S_m будем задавать в виде

$$\omega^\alpha_0 = t^\alpha\theta, \quad D\theta = 0 , \qquad (15)$$

где t^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dt^\alpha - t^\alpha\omega^0_0 + t^\beta\omega^\alpha_\beta = t^\alpha_1\theta \qquad (15')$$

Условимся $x\{t^\alpha\}$ обозначать линию, описываемую в смысле [2](стр.76-77) точкой x слоя $P(u)$ точки $A_0(u)$ вдоль (15), а $Tx\{t^\alpha\}$ – касательную к ней в точке x [2](стр.77)).

Будем в дальнейшем говорить, что каждой прямой

$$t = t^\alpha(A_0A_\alpha)$$

в L_m отвечает на S_m линия (15), такая, что $t = TA_0\{t^\alpha\}$ и обратно, каждой линии (15) на S_m в L_m отвечает прямая $t = t^\alpha(A_0A_\alpha)$ такая, что $t = TA_0\{t^\alpha\}$.

Так же, как и в [2] (стр.79-80) найдем, что система

$$x^n = b_\rho x^\rho$$
$$(b_\rho A^\rho_{\alpha\beta} - A^n_{\alpha\beta})x^\alpha t^\beta - b_{\rho\alpha}x^\rho t^\alpha = 0 \qquad (16)$$

определит характеристику гиперплоскости (12) вдоль кривой (15), т.е. совокупность фокусов гиперплоскости (12) (в смысле [2], стр.79), отвечающих одной и той же кривой (12). Все характеристики (16) гиперплоскости (12) пересекаются в общем случае, т.е. в случае

$$A = \det\|b_\rho A^\rho_{\alpha\beta} - A^n_{\alpha\beta}\| \neq 0 , \qquad (17)$$

по $(n-m-1)$-мерному линейному подпространству ($(n-m-1)$-плоскости) L^*_{n-m-1}, которое в локальных координатах репера слоя $P(u)$ точки $A_0(u)$ определяется системой

$$x^n = b_\rho x^\rho , \quad x^\alpha = a^\alpha_\rho x^\rho \qquad (18)$$

где a^α_ρ определяется из системы линейных уравнений

$$(b_\rho A^\rho_{\alpha\rho} - \Lambda^n_{\alpha\rho})\, a^\alpha_q = b_{q\rho} \qquad (19)$$

с определителем (I7).

В дальнейшем линейное подпространство (I8) будем называть характеристическим элементом гиперплоскости (I2).

Используя уравнения (II),(I3) и (I4), находим:

$$da^\alpha_\rho + \omega^\rho_\rho a^\rho_q + \omega^\alpha_\rho + \omega^\alpha_n b_\rho - a^\alpha_q(\omega^q_\rho + \omega^q_n b_\rho) -$$
$$- a^\alpha_q a^\rho_\rho \omega^q_\rho = a^\alpha_{\rho\rho}\omega^\rho. \qquad (20)$$

3.Так как $(n-m-1)$ -плоскость L^*_{n-m-1} является характеристическим элементом гиперплоскости (I2),то она будет иметь фокусную алгебраическую поверхность (фокальную в смысле [2],стр.8I-82).Найдем эту алгебраическую поверхность.Прежде всего из (I8) заключаем,что

$$L^*_{n-m-1} = (E_0 E_{m+1} \dots E_{n-1}), \qquad (21)$$

где

$$E_0 = A_0, \quad E_\rho = a^\alpha_\rho A_\alpha + A_\rho + b_\rho A_n \qquad (22)$$

Пусть

$$F = x^0 A_0 + x^\rho E_\rho$$

-фокус $(n-m-1)$ -плоскости (2I) в смысле [2](стр.79).

Тогда так же,как и в [2](стр.8I,см.формулы (9,I0), с учетом (2I),(22) и (20) находим,что фокусная алгебраическая поверхность $(n-m-1)$ -плоскости (2I) определяется системой

$$x^n = b_\rho x^\rho, \quad x^\alpha = a^\alpha_\rho x^\rho,$$

$$\det\| x^0 \delta^\alpha_\rho + x^\rho a^\alpha_{\rho\rho} \| = 0.$$

Отсюда следует,что линейная поляра точки A_0 (в смысле[2], стр.84) определяется системой

$$x^n = b_\rho x^\rho, \quad x^\alpha = a^\alpha_\rho x^\rho, \quad x^0 = a_\rho x^\rho, \qquad (23)$$

где

$$a_\rho = -\frac{1}{m} a^\alpha_{\rho\alpha}. \qquad (24)$$

Обозначив плоскость (23) символом L^*_{n-m-2}, будем иметь:

$$L^*_{n-m-2} = (H_{m+1} \dots H_{n-1}), \qquad (25)$$

где

$$H_\rho = E_\rho + a_\rho A_0 = a^\alpha_\rho A_\alpha + A_\rho + b_\rho A_n + a_\rho A_0. \qquad (26)$$

§3.Инвариантные конусы и линейные комплексы в L_m.

I.Рассмотрим в каждом локальном пространстве P_n (слое) точки A_0 гиперплоскость,проходящую через L_m и определяемую уравнением

$$x_\alpha \dot{x}^\alpha = 0 \qquad (27)$$

Зададим в m -плоскости L_m прямую

$$x = x^\alpha (A_0 A_\alpha), \tag{28}$$

где при фиксированных главных параметрах x^α удовлетворяют системе

$$\delta x^\alpha - x^\alpha \pi_0^0 + x^\beta \pi_\beta^\alpha = 0.$$

Из соотношения

$$dx = (\dots)^\alpha (A_0 A_\alpha) + x^\alpha \omega_\alpha^{\hat\alpha} (A_0 A_{\hat\alpha}) + [2]$$

в силу (2),(7) и (9) следует, что каждой прямой (28) в L_m, содержащейся в слое P_n точки A_0, отвечает $(m-1)$-плоскость

$$x^\alpha x_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta = 0, \quad t^{\hat\beta} = 0. \tag{29}$$

Геометрически эта $(m-1)$ -плоскость характеризуется тем, что содержит все прямые

$$t = t^\alpha (A_0 A_\alpha), \tag{30}$$

которым отвечают линии (15) такие, что $T_x\{t^\alpha\}$ принадлежат гиперплоскости (27). Здесь $T_x\{t^\alpha\}$ -касательное линейное подпространство к 1-семейству прямых (28) вдоль (15), т.е. линейная оболочка всех $T_z\{t^\alpha\}$, причем z -любая точка прямой (28). Аналогично получаем, что каждой прямой (28) в L_m отвечает еще одна $(m-1)$ -плоскость

$$x^\alpha x_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\beta\alpha} t^\beta = 0, \quad t^{\hat\beta} = 0 \tag{31}$$

Геометрически эта $(m-1)$ -плоскость представляет собой совокупность всех прямых (30), таких, что $T_t\{x^\alpha\}$ принадлежит гиперплоскости (27). Здесь рассматривается линия на S_m, отвечающая прямой (28). Так как тензор $A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}$ не симметричен в общем случае по α и β, то линейные подпространства (29) и (31) в общем случае не совпадают. Эти подпространства будут совпадать либо, когда пространство $P_{n,m}$ является пространством без кручения, либо, когда оно однородно. Заметим, что линейные подпространства (31) и (29) в общем случае не проходят через прямую (28). Все прямые (28), которым отвечают проходящие через них линейные подпространства (29) и (31) (если одно из этих подпространств проходит через (28), то через эту прямую проходит и второе линейное подпространство), образуют в L_m конус второго порядка с вершиной в точке A_0, определяемый в слое P_n точки A_0 системой

$$x_{\hat\alpha} \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat\beta} = 0. \tag{32}$$

Система же

$$x_{\hat\alpha} R^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0, \quad t^{\hat\beta} = 0 \tag{33}$$

определяет в L_m $(m-1)$-мерный линейный комплекс, который каждой прямой (28) ставит в соответствие $(m-1)$-плоскость, проходящую через прямую (28) и пересечение линейных подпространств (29) и (31), отвечающих этой прямой.

Таким образом, с каждой гиперплоскостью (27) в L_m ассоциируются конус (32) и линейный комплекс (33).

2. Конус (32) и линейный комплекс (33), соответствующие гиперплоскости (12), определяются уравнениями:

$$\Lambda_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \tag{34}$$

$$R_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad t^{\hat{\beta}} = 0, \tag{35}$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta} = b_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\alpha\beta} - \Lambda^{n}_{\alpha\beta} \tag{36}$$

$$R_{\alpha\beta} = b_{\rho} R^{\rho}_{o\alpha\beta} - P^{n}_{o\alpha\beta}. \tag{37}$$

Будем в дальнейшем считать, что

$$\Lambda = \det \| \Lambda_{\alpha\beta} \| \neq 0, \tag{38}$$

т.е. конус (34) является невырожденным. Заметим, что конус (34) и линейный комплекс (35) являются основными в смысле [5] относительно не симметрического тензора

$$A_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}. \tag{39}$$

3. Среди всех гиперплоскостей (27), проходящих через L_m в слое P_n точки A_o, будем искать такие гиперплоскости, которым соответствуют конусы (32), аполярные конусу (34) в смысле [6], т.е. удовлетворяющие условию:

$$x_{\hat{\alpha}} \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta} = 0, \tag{40}$$

где $\Lambda^{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям:

$$\Lambda_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta\gamma} = \Lambda \delta^{\gamma}_{\alpha}. \tag{41}$$

Здесь $\Lambda_{\alpha\beta}$ определяются по формулам (36), а Λ – по формуле (38). Из (40) следует, что все искомые гиперплоскости в слое P_n проходят через одну и ту же $(m+1)$-плоскость, содержащую L_m:

$$L_{m+1} = (L_m, A_{\hat{\alpha}}) \Lambda^{\hat{\alpha}}, \tag{42}$$

где

$$\Lambda^{\hat{\alpha}} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta}. \tag{43}$$

§4. Оснащающая $(n-m)$-плоскость.

1. Оснащающей $(n-m)$-плоскостью L_{n-m} или нормалью первого рода m-поверхности S_m в смысле А.П.Нордена [7] называется такая $(n-m)$-плоскость слоя P_n точки A_o, которая с m-плоскостью L_m имеет только одну общую точку A_o. Пусть $(n-m)$-плоскость L_{n-m} определяется системой

$$x^{\alpha} = C^{\alpha}_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}}. \tag{44}$$

Тогда в соответствии с [2](стр.57) система величин $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$ должна удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям

$$dC^{\alpha}_{\hat{\alpha}} - C^{\alpha}_{\hat{\beta}} \omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} + C^{\gamma}_{\hat{\alpha}} \omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}} = C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta} \omega^{\beta}. \tag{45}$$

Продолжение системы (45) приводит к дифференциальным уравнениям

$$dC^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}+C^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}\omega^{0}_{0}-C^{\alpha}_{\hat\beta\beta}\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha}-C^{\alpha}_{\hat\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}+C^{\gamma}_{\hat\alpha\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma}-C^{\alpha}_{\hat\beta}A^{\hat\beta}_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\hat\alpha}+$$

$$+C^{\sigma}_{\hat\alpha}A^{\hat\beta}_{\sigma\beta}\omega^{\alpha}_{\hat\beta}-C^{\gamma}_{\hat\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{\gamma}-\omega^{0}_{\hat\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta}+(C^{\alpha}_{\hat\alpha\gamma}R^{\gamma}_{0\beta\tau}+R^{\alpha}_{\hat\alpha\beta\tau}+$$

$$+C^{\alpha}_{\hat\beta}R^{\hat\beta}_{\hat\alpha\tau\beta})\omega^{\tau}=C^{\alpha}_{\hat\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}\quad, \tag{46}$$

где величины $C^{\alpha}_{\hat\alpha\beta\gamma}$ симметричны по β и γ.

Для оснащающей $(n-m)$-плоскости (44), внутренне определенной m-мерной гиперполосой, рассматриваемой в настоящей статье, положим

$$C^{\beta}_{\rho}=\frac{m\Lambda a^{\beta}_{\rho}+\Lambda^{q}a^{\beta}_{q}b_{\rho}-q^{\beta}b_{\rho}}{m\Lambda}\quad,$$

$$C^{\beta}_{n}=\frac{q^{\beta}-\Lambda^{\rho}a^{\beta}_{\rho}}{m\Lambda}\;. \tag{47}$$

Здесь q^{β} определяется из системы уравнений

$$A_{\alpha\beta}q^{\beta}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha}b_{\hat\alpha}=0\quad,\ (b_{n}=-1) \tag{48}$$

с определителем (I7), который в силу (38) определяется по формуле

$$A=\det\|A_{\alpha\beta}\|\quad, \tag{49}$$

а величины $\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha}$, явный вид которых нас не интересует, входят в систему

$$d\Lambda^{\hat\alpha}-\tilde\Omega\Lambda^{\hat\alpha}+\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta}\Lambda^{\hat\beta}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha}\omega^{\alpha}, \tag{50}$$

$$\tilde\Omega=\omega^{0}_{0}+\Omega^{*}-\Omega\ ,\quad \Omega=-\omega^{0}_{0}-\omega^{n}_{n}+b_{\rho}\omega^{\rho}_{n},\quad \Omega^{*}=m\Omega-2\omega^{\alpha}_{\alpha},$$

которую легко получить, если воспользоваться формулами (4I), (43), (I0) и (II).

Учитывая соотношения (47)-(50), (42), (38), (20), можно показать, что система величин (47) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений типа (45).

2. Перейдем к выяснению геометрической интерпретации $(n-m)$-плоскости (44), определяемой системами величин (47). Пусть точка

$$R=x^{0}A_{0}+x^{\alpha}A_{\alpha}+x\Lambda^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha}$$

принадлежит линейному подпространству (42). При развертывании пространства $P_{n,n}$ на исходный слой P_n, соответствующий точке A_0, вдоль любой кривой (I5) точка R будет описывать кривую $R\{t^{\alpha}\}$ с касательной $TR\{t^{\alpha}\}$. Линейной оболочкой всех $TR\{t^{\alpha}\}$ будет являться m-мерная плоскость $L(R)_m$, касательная к m-поверхности $(R)_m$. Будем искать такие точки R, что $L(R)_m$ и L_{m+1} принадлежат одной и той же гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(R)\supset L_{n-m-2}$. Из

$$dR=(\ldots)^{0}A_{0}+(\ldots)^{\alpha}A_{\alpha}+(\ldots)\Lambda^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha}+x\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha}\omega^{\alpha}A_{\hat\alpha}+$$

$$+\;x^{\alpha}\omega^{\hat\alpha}_{\alpha}A_{\hat\alpha}+[2],$$

$$(dR, A_0, A_1 \dots A_m, \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha}, A_{m+1} + b_{m+1} A_n, \dots, A_{n-1} + b_{n-1} A_n) = 0$$

с точностью до членов порядка малости I получаем следующую систему для определения x^β, x и x^0:

$$x^\beta A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} b_{\hat\alpha} + x \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha} b_{\hat\alpha} = 0, \quad (b_n = -1) \qquad (51)$$

с определителем $A \neq 0$. Отсюда следует, что q^β образуют единственное решение системы (48). Следовательно, геометрическим местом искомых точек R будет являться в общем случае (в случае $A \neq 0$) прямая

$$q = (A_0, \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha} + q^\alpha A_\alpha), \qquad (52)$$

проходящая через A_0. В случае $A = 0$, как это следует из (51), геометрическим местом искомых точек R будет некоторое линейное подпространство, размерность которого будет равна $m + 1 - \mathrm{rang}\,\|A_{\alpha\beta}\|$. Из (38), (36), (41), (43) и (48) следует, что прямая (52) в общем случае не лежит в L_m и не принадлежит $(n-m-1)$-плоскости (21). Поэтому линейной оболочкой прямой q и L^*_{n-m-1} будет некоторая $(n-m)$-плоскость

$$L_{n-m} = (A_0, E_{m+1}, \dots, E_{n-1}, \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha} + q^\alpha A_\alpha) = (A_0, C^\alpha_{m+1} A_\alpha + A_{m+1}, \dots, C^\alpha_n A_\alpha + A_n) \qquad (53)$$

которая в силу (51), (52) и (18) определяется системой (44), где величины $C^\alpha_{\hat\alpha}$ определяются по формулам (47). Заметим, что $(n-m)$-плоскость (53) является также линейной оболочкой прямой (52) и линейного подпространства (25).

§5. Нормаль второго рода.

I. Так же как и в §3 (см. (23)-(26)), находим, что линейной полярой точки A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности $(n-m)$-плоскости (53) с учетом (47), (45) и (46), является $(n-m-1)$-плоскость $\tilde{L}_{n-m-1}$, определяемая системой

$$x^\alpha = C^\alpha_{\hat\alpha} x^{\hat\alpha}, \quad x^0 = U_{\hat\alpha} x^{\hat\alpha}, \qquad (54)$$

где

$$U_{\hat\alpha} = -\frac{1}{m} U^\alpha_{\hat\alpha\alpha}, \quad U^\alpha_{\hat\alpha\beta} = C^\alpha_{\hat\alpha\beta} - C^\alpha_{\hat\beta} C^\gamma_{\hat\alpha} A^{\hat\beta}_{\gamma\beta}. \qquad (55)$$

Из (55), (45) и (46) следует, что система величин $U_{\hat\alpha}$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям

$$dU_{\hat\alpha} = -U_{\hat\alpha} \omega^0_0 + U_{\hat\beta} \omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha} - \omega^0_{\hat\alpha} - C^\gamma_{\hat\alpha} \omega^0_\gamma + U_{\hat\alpha\gamma} \omega^\gamma. \qquad (56)$$

Система уравнений (54) дает

$$\tilde{L}_{n-m-1} = (G_{m+1}, G_{m+2}, \dots, G_n), \qquad (57)$$

где

$$G_{\hat\alpha} = U_{\hat\alpha} A_0 + C^\alpha_{\hat\alpha} A_\alpha + A_{\hat\alpha}. \qquad (58)$$

2. Рассмотрим точки

$$X = A_0 + x^\alpha A_\alpha \in L_m, \quad Y = y^{\hat\alpha} G_{\hat\alpha} \in Z_{n-m-1}.$$

Тогда с учетом (55)-(58),(7)-(9) и (45) будем иметь

$$dX = (\omega_0^0 + x^\alpha \omega_\alpha^0) A_0 + (\dots)^\alpha A_\alpha + x^\alpha \omega_\alpha^{\hat\beta} A_{\hat\beta} + [2],$$

$$dY = (\dots)^{\hat\alpha} G_{\hat\alpha} + y^{\hat\alpha} U^*_{\hat\alpha\alpha}\omega^\alpha A_0 + (U_{\hat\alpha}\omega_0^\alpha + U^\alpha_{\hat\alpha\beta}\omega^\beta)A_\alpha + [2], \quad (59)$$

где

$$U^*_{\hat\alpha\gamma} = U_{\hat\alpha\gamma} + U_{\hat\beta} A^{\hat\beta}_{\alpha\gamma} C^\alpha_{\hat\alpha}. \quad (60)$$

Из (59) и (60) получаем, что точка $Y = y^{\hat\alpha} G_{\hat\alpha}$, где

$$y^{\hat\alpha} = x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta$$

принадлежит Z_{n-m-1} и $(L_m, TX\{t^\alpha\})$, а точка

$$\mathring{X} = \mathring{x}^0 A_0 + \mathring{x}^\alpha A_\alpha,$$

где

$$\mathring{x}^0 = x^\alpha U^*_{\hat\alpha\sigma} A^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma} t^\gamma y^\sigma, \quad (61)$$

$$\mathring{x}^\beta = x^\alpha (U_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\sigma} t^\beta y^\sigma + A^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma} U^\beta_{\hat\alpha\sigma} t^\gamma y^\sigma), \quad (62)$$

такова, что $\mathring{X} = L_m \cap (Z_{n-m-1}, TY\{y^\alpha\})$. Здесь предполагается, что развертка пространства $P_{n,n}$ на исходный слой

P_n точки A_0 производится вдоль кривой на базе:

$$\omega^\alpha = y^\alpha \theta, \quad D\theta = 0, \quad (63)$$

где y^α удовлетворяют при фиксированных главных параметрах уравнениям типа (15').

Таким образом, мы получаем проективное преобразование (62) (являющееся, как легко показать, в общем случае невырожденным) m-плоскости L_m в себя, переводящее прямую $A_0 X \in L_m$ в прямую $A_0 \mathring{X} \in L_m$. При этом предполагается, что направление (15) не является фокальным для m-плоскости L_m, а (63) — для Z_{n-m-1}. Проективное преобразование (62) будет проективным преобразованием W в смысле [6], т.е. след матрицы этого преобразования равен нулю, тогда и только тогда, когда

$$a_{\alpha\beta} t^\alpha y^\beta = 0, \quad (64)$$

где не симметрический в общем случае по нижним индексам тензор $a_{\alpha\beta}$ определяется по формулам

$$a_{\alpha\beta} = U_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\beta\alpha} + A^{\hat\alpha}_{\gamma\alpha} U^\gamma_{\hat\alpha\beta}. \quad (65)$$

3. Пусть прямые

$$t = t^\alpha (A_0 A_\alpha), \quad y = y^\alpha (A_0 A_\alpha)$$

из L_m отвечают линиям (15) и (63), т.е. $t = TA_0\{t^\alpha\}$, $y = TA_0\{y^\alpha\}$. Тогда в силу (64) каждой прямой $t \in L_m$ отвечают в L_m две $(m-1)$-плоскости, проходящие через A_0:

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} t^{\alpha} y^{\beta} = 0, \quad y^{\hat\beta} = 0, \tag{66}$$

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} y^{\alpha} t^{\beta} = 0. \tag{67}$$

Геометрическая характеристика этих $(m-1)$-плоскостей непосредственно вытекает из рассуждений предыдущего пункта, если $t = A_0X$, $y = A_0\hat{X}$, причем для линейного подпространства (66) надо брать $TX\{t^{\alpha}\}$, $TY\{y^{\alpha}\}$, а для (67) – $TX\{y^{\alpha}\}$, $TY\{t^{\alpha}\}$. Линейные подпространства (66) и (67) дают возможность с помощью тензора $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ в соответствии с [5] определить: <u>основной конус</u> Q_{m-1}:

$$\mathfrak{A}_{(\alpha\beta)} y^{\alpha} y^{\beta} = 0, \quad y^{\hat\alpha} = 0, \tag{68}$$

<u>основной $(m-1)$-мерный линейный комплекс</u> K_{m-1}:

$$\mathfrak{A}_{[\alpha\beta]} t^{\alpha} y^{\beta} = 0 \tag{68'}$$

4. Заметим, что формулы (61) и (62) определяют некоторое проективное преобразование $\Pi(t,y)$, отвечающее линиям (15) и (63) и переводящее любую точку $X \in L_m$ в точку $Y \in L_m$. Пусть $X \in L_m$ и $x = y = t = A_0X = x^{\alpha}(A_0A_{\alpha})$. Тогда точка $\hat{X} = \hat{x}^0 A_0 + \hat{x}^{\alpha} A_{\alpha}$ получается из X преобразованием $\Pi(x,x)$. Эту точку мы будем называть точкой, соответствующей точке X при преобразовании $\Pi = \Pi(x,x)$: $\hat{X} = \Pi X$. Рассмотрим в L_m некоторую $(m-1)$-плоскость $\bar{u}$:

$$u_0 x^0 + u_{\alpha} x^{\alpha} = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0, \tag{69}$$

не проходящую через точку A_0, т.е. $u_0 \neq 0$. Тогда этой $(m-1)$-плоскости в L_m будет соответствовать алгебраический $(m-1)$-мерный конус третьего порядка с вершиной в точке A_0:

$$u_h \mathfrak{A}^{h}_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0, \quad (h = 0,1,\dots m), \tag{70}$$

где

$$\mathfrak{A}^{0}_{\alpha\beta\gamma} = A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} U^{0}_{\hat\alpha\gamma}, \quad \mathfrak{A}^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = U_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} \delta^{\sigma}_{\gamma} + A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} U^{\sigma}_{\hat\alpha\gamma}. \tag{71}$$

Геометрически конус (70) представляет собой совокупность всех прямых A_0X, точкам которых $X = A_0X \cap \bar{u}$ отвечают при преобразовании $\Pi = \Pi(x,x)$ точки $\hat{X} \in \bar{u}$. Будем выбирать такую $(m-1)$-плоскость (69), чтобы алгебраические конусы (70) и (34) были аполярными в смысле [6], т.е.

$$u_0 \mathfrak{A}^{0}_{\alpha} + u_{\sigma} \mathfrak{A}^{\sigma}_{\alpha} = 0, \tag{72}$$

где

$$\mathfrak{A}^{0}_{\alpha} = \mathfrak{A}^{0}_{(\alpha\beta\gamma)} \Lambda^{\beta\gamma}, \quad \mathfrak{A}^{\sigma}_{\alpha} = \mathfrak{A}^{\sigma}_{(\alpha\beta\gamma)} \Lambda^{\beta\gamma}. \tag{73}$$

Здесь величины $\Lambda^{\beta\gamma}$ определяются по формулам (41). Можно показать, что

$$\mathfrak{A}^{*} = \det \| \mathfrak{A}^{\sigma}_{\alpha} \|$$

в общем случае отличен от нуля. Тогда из (72) с учетом $u_0 \neq$ получаем

$$u_\sigma = -\frac{\alpha_\sigma}{\alpha} u_0 ,$$

где каждый определитель α_σ получается из α заменой элементов столбца с номером σ соответствующими элементами $\alpha^\circ_{\hat{\alpha}}$. Следовательно, существует одна $(m-1)$ - плоскость L^*_{m-1}, в общем случае не проходящая через точку A_0, которой соответствует конус (70), аполярный в смысле [5] конусу (34). Из (74) и (69) следует, что $(m-1)$ - плоскость L^*_{m-1} определяется системой

$$\alpha x^0 - \alpha_\sigma x^\sigma = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0 .$$

Это линейное подпространство может служить нормалью второго рода в смысле А.П.Нордена [7]. Поэтому в итоге получается, что m -поверхность S_m с заданным полем гиперплоскостей, содержащих соответствующие m -плоскости L_m, оказывается нормализованной в смысле А.П.Нордена [7].

Замечание I. Рассмотренные в m -плоскости L_m конусы (34) и (68), линейные комплексы (35) и (68) можно использовать для определения инвариантных направлений. Например, можно рассмотреть основные в смысле [5] прямые относительно (34) и (35) или (68) и (68), а также прямые, поляры которых относительно (34) и (68) совпадают. Во всех случаях таких прямых будет не более m

Замечание 2. При $n = \frac{m(m+1)}{2} + 1$ в случае $\operatorname{rang}[R^{\hat{\alpha}}_{0\hat{p}}] = \frac{m(m-1)}{2}$, где $\hat{p} \leftrightarrow (\alpha,\beta)$ $(\alpha < \beta)$ указывает на номер строки, а $\hat{\alpha}$ -на номер столбца, существует единственная (специальная) гиперплоскость (27), которой соответствует неопределенный линейный комплекс (33). Если гиперплоскость (12) считать специальной, то b_p будет удовлетворять системе: $b_p R^p_{0\hat{p}} = R^n_{0\hat{p}}$ с определителем $R = \det[R^p_{0\hat{p}}] \neq 0$. В этом случае m -поверхность S_m оказывается внутренним образом нормализованной в смысле Нордена А.П., т.е. нормали первого и второго рода определяются внутренним образом самой m -поверхностью.

Литература

I. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск, матем. об-ва, 2, I953, 275-382.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. геом. сем. 3., АН СССР, ВИНИТИ, М-I97I, 49-94.

3. Остиану Н.М., Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности II. Там же, 95-II4.

4. Вагнер В.В., Теория поля локальных гиперполос. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 8, I950, I97-272.

5. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б., К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. Матер. 3-й научн. конф. по матем. и мех., вып. I, изд-во Томского ун-та, I973, 50-52.

6. Ивлев Е.Т., К геометрической интерпретации операции

свертывания некоторых тензоров.Матер.итоговой научн.конф.матем.и мех.за 1970 год I.Изд-во Томского ун-та,1970,121-123.

7.Норден А.П.,Обобщение основной теоремы теории нормализации.Изв.высш.уч.зав."Математика",1966,№2 (55),9-19.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

К и м В.Б.

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ,ЭЛЕМЕНТ КОТОРОГО СОСТОИТ ИЗ КУБИКИ И ТОЧКИ.

В работе изучается трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из плоской кривой третьего порядка (кубики) и точки в P_3 .С помощью компонент основного фундаментального объекта строятся некоторые геометрические объекты и изучаются проективно инвариантные геометрические образы,определяемые этими объектами.Эти геометрические образы позволяют получить некоторые частные классы рассматриваемых многообразий.

§I.Включение элемента в репер.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается многообразие $K(0,3,3)^3$ -трехпараметрическое многообразие,элемент которого состоит из кубики K_3 и точки M ,не лежащей в плоскости кубики,причем плоскости кубики образуют трехпараметрическое семейство.

Пространство P_3 относится к проективному реперу $R=\{A_0 A_1 A_2 A_3\}$,деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta . \tag{1.1}$$