ных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.I. С.275-382.

4. И в л е в Е.Т. Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,m}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1985. Вып. 16. С.23-26.

5. И в л е в Е.Т. Об инвариантных структурах почти произведения пространства аффинной связности // Там же, 1988. Вып. 19. С.39-43.

6. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.7-246.

7. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. С.432.

УДК 514.75

ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ В P_3

С.В.К и р е е в а

(Московский автодорожный институт)

В настоящей работе продолжается [2] изучение отображения в P_3, имеющего одномерное и двумерное распределения двойных линий, касательные к которым пересекаются в точках нормализующей плоскости. Получен ответ на вопрос о всем множестве двойных линий отображения, а также описаны фигуры, по которым пересекаются касательные к двойным линиям.

В проективном пространстве P_3 задан диффеоморфизм $f:(\Omega\subset P_3)\to(\bar\Omega\subset P_3)\mid A\in\Omega\to B\in\bar\Omega$. Семейство $\Pi_2(A)$ нормализует области $\Omega,\bar\Omega$ в смысле А.П.Нордена: $A\to\Pi_2(A), B\to\Pi_2(A), B\bar\in\Pi_2(A)$. На прямой (AB) [2] существуют две различные инвариантные точки $N_1^1=N_2^2$, N_3^3: $\vec N_1^1=-\gamma_1^1\vec A+\vec B$, $\vec N_3^3=-\gamma_3^3\vec A+\vec B$, одномерное $\Delta_1|\Delta_1(A)=(AA_3)$ и двумерное $\Delta_2|\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$ распределения двойных линий, касательные к которым пересекаются соответственно в точке $A_3\in\Pi_2(A)$ и по прямой $(A_1A_2)\subset\Pi_2(A)$.

А существуют ли двойные линии отображения f, касательные к которым пересекаются вне нормализующей плоскости $\Pi_2(A)$? Дадим ответ на поставленный вопрос.

Пусть прямая (AB) пересекает нормализующую плоскость в точке C: $\vec C=\gamma^i\vec A_i$ $(i,j,k=1,2,3)$; $\vec B=\vec A+\gamma^i\vec A_i$.

Очевидно, что направление (AB) – двойное для отображения f. Если точка A смещается в направлении (AB), то точка B смещается в направлении $(B\bar C^*)$: $\vec{\bar C}^*=\gamma_1^1(\gamma^1\vec A_1+\gamma^2\vec A_2)+\gamma_3^3\gamma^3\vec A_3$. При смещении точки A в направлении (AC^*): $\vec C^*=\gamma_3^3(\gamma^1\vec A_1+\gamma^2\vec A_2)+\gamma_1^1\gamma^3\vec A_3$ точка B перемещается в направлении (BA). Как будет показано ниже, направления (AC^*), $(B\bar C^*)$ имеют и еще одну геометрическую характеристику.

Все множество двойных линий отображения f будет зависеть от положения прямой (AB).

I с л у ч а й. Пусть прямая (AB) имеет общее положение: $(AB)\neq\Delta_1(A)$, $AB\bar\subset\Delta_2(A)$.

Обозначим $\tilde c=(A_3C)$, $\tilde c\cap(A_1A_2)=C_1$. Возникает два-распределение $\tilde\Delta_2|_{\Delta_2}(A)=(ACA_3)$, любая линия которого – двойная. В самом деле. При смещении точки A в направлении (AM), где $M\in\tilde c$, $\vec M=\mu\vec C_1+\eta\gamma^3\vec A_3$, точка B смещается по направлению $(B\bar M)$: $\vec{\bar M}=\mu\gamma_1^1\vec C_1+\eta\gamma_3^3\gamma^3\vec A_3$, а т.к. прямые (AB) и $\tilde c$ лежат в плоскости $\tilde\Delta_2(A)$, то и прямые (AM) и $(B\bar M)$, лежащие в этой же плоскости, пересекаются. Это и доказывает, что любое направление плоскости $\tilde\Delta_2(A)$ – двойное в отображении f. Можно показать, что других двойных линий, кроме двойных линий распределений Δ_1, Δ_2, $\tilde\Delta_2$, отображение f не имеет.

В плоскости $\tilde\Delta_2(A)$ существуют два пучка (AM) и $(B\bar M)$ с центрами в точках A и B, которые находятся в проективном соответствии. Точка Y пересечения соответствующих лучей (AM) и $(B\bar M)$ опишет линию второго порядка $\bar K^2$. В репере

$$\tilde R^A=\{A,C_1,C_3\},\quad \vec C_1=\gamma^1\vec A_1+\gamma^2\vec A_2,\quad \vec C_3=\gamma^3\vec A_3$$

на плоскости $\tilde\Delta_2(A)$ уравнение кривой $\bar K^2$ имеет вид:

$$(\gamma_3^3-\gamma_1^1)y^1y^3-\gamma_3^3y^0y^3+\gamma_1^1y^0y^1=0, \qquad (*)$$

где текущая точка Y имеет координаты (y^0,y^1,y^3). Ранг матрицы квадратичной формы в уравнении (*) равен трем, а детерминант равен $\gamma_1^1\gamma_3^3(\gamma_1^1-\gamma_3^3)$. Для рассматриваемого отображения это произведение всегда отлично от нуля.

Итак, касательные к двойным линиям распределения $\tilde\Delta_2$ пересекаются по невырожденной кривой второго порядка $\bar K^2$. Легко проверить, что точки $A(1;0;0)$, $C_1(0;1;0)$, $C_3(0;0;1)$, $B(1;1;1)$ (координаты даны в репере $\tilde{\mathcal{R}}^{A}$) лежат на кривой $\bar{K}^2$.

Прямые (AC^*) и $(B\bar{C}^*)$ – касательные к кривой $\bar{K}^2$ соответственно в точках A и B . Точки $C_1, C_3 = A_3$ $(\vec{C}_3 = \gamma^3 \vec{A}_3), C^*, \bar{C}^*$ лежат на одной прямой и их сложное отношение $(C_1 C_3, C^* \bar{C}^*) = (\gamma_1^1)^2 : (\gamma_3^3)^2 > 0$. Следовательно, пары C_1, C_3 и $C^*, \bar{C}^*$ не могут разделять друг друга гармонически.

Поляра точки C_1 пересекает прямую (AB) в точке S: $\vec{S} = -\gamma_3^3 \vec{A} + \gamma_1^1 \vec{B}$, а поляра точки C_3 – в точке $\mathcal{D}$: $\vec{\mathcal{D}} = -\gamma_1^1 \vec{A} + \gamma_3^3 \vec{B}$. А это означает, что прямые $(C_1 S), (C_3 \mathcal{D})$ – касательные к кривой $\bar{K}^2$ в точках C_1 и C_2 соответственно, причем $(AB, S\mathcal{D}) = (\gamma_3^3)^2 : (\gamma_1^1)^2$. Из положительности сложного отношения $(AB, S\mathcal{D})$ следует, что пары A, B и $S, \mathcal{D}$ тоже никогда не разделяют друг друга.

В рассматриваемом отображении f $\gamma_1^1 \neq \gamma_3^3$, поэтому сложные отношения $(C_1 C_3, C^* \bar{C}^*), (AB, S\mathcal{D})$ равны единице тогда и только тогда, когда $\gamma_1^1 = -\gamma_3^3$. При этом касательные (AC^*) и $(B\bar{C}^*)$ пересекают прямую $\tilde{C}$ в точке $C^* = \bar{C}^*$, которая является четвертой гармонической точке C относительно пары точек C_1 и C_3 , а касательные $(C_1 S), (C_3 \mathcal{D})$ пересекаются в точке $S = \mathcal{D}$, которая составляет гармоническую четверку с точкой C относительно пары точек A и B . При условии $\gamma_1^1 = -\gamma_3^3$ сложное отношение

$$(AB, N_1^1 N_3^3) = -1 .$$

Итак, если пары точек A, B и N_1^1, N_3^3 гармонически разделяют друг друга, то полюсом прямой (AB) относительно кривой $\bar{K}^2$ будет точка C^* , четвертая гармоническая точке C относительно точек C_1, C_3 , а полюсом прямой $\tilde{C}$ – точка S – четвертая гармоническая точке C относительно пары точек A и B . В этом случае полярой точки C , будет прямая $(C^* \mathcal{D})$; прямая $(C^* N_3^3)$ – поляра точки N_1^1 , а прямая $(C^* N_1^1)$ – поляра точки N_3^3 относительно кривой $\bar{K}^2$.

II с л у ч а й. Пусть (AB) – двойное направление распределения Δ_2 . Тогда существует еще одно 2-распределение $\tilde{\Delta}_2$ двойных линий. В каждой точке A плоскость $\tilde{\Delta}_2(A)$ совпадает с плоскостью, проходящей через прямую (AB) и прямую $\Delta_1(A)$. Двойные направления плоскости $\tilde{\Delta}_2(A)$ пересекаются на прямой $(A_3 \mathcal{D})$, $\vec{\mathcal{D}} = -\gamma_1^1 \vec{A} + \gamma_3^3 \vec{B}$, причем $(AB, C\mathcal{D}) = (AB, N_3^3 N_1^1)$.

III с л у ч а й. Направление (AB) совпадает с направлением I-распределения Δ_1 . Можно показать, что любое направление (AL) области Ω – двойное в отображении f . Касательные к двойным линиям будут пересекаться в точках двумерной плоскости $(A_1 A_2 S)$, $\vec{S} = -\gamma_3^3 \vec{A} + \gamma_1^1 \vec{B}$, где $(AB, CS) = (AB, N_1^1 N_3^3)$.

З а м е ч а н и е. В докладе [3] решена аналогичная задача о всем множестве двойных линий для отображения, имеющего два двумерных распределения двойных линий, касательные к которым пересекаются в нормализующей плоскости.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

2. К и р е е в а С.В. Об одном классе отображений // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.39-41.

3. К и р е е в а С.В. Двойные линии отображения и корреляции в P_4 // Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия": Тез. докл. Казань, 1992. Ч.I. С.40.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ОРИСФЕР СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном пространстве Лобачевского Λ_3 в интерпретации Кэли-Клейна исследуются подклассы конгруэнций орисфер со специальными свойствами ассоциированных геометрических образов: собственной фокальной поверхности (F) [1, с.50] и прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ^*) , где $\ell \equiv A_0 F$, A_0 – несобственная точка орисферы, ℓ^* –прямая, полярно сопряженная прямой ℓ относительно абсолюта Q_0 проективного пространства P_3 . Доказано, что торсы прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ^*) соответствуют. Если поверхность (F) вырождается в линию, то касательная к ней проходит через один из фокусов луча ℓ^* . Изучены конгруэнции орисфер, у которых прямолинейная конгруэнция (ℓ) вырождается в связку прямых и конгруэнции орисфер с плос-