УДК 514.76

В. С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается гладкая нелинейчатая поверхность σ с параболическими конгруэнциями первых и вторых директрис Вильчинского [2, с. 40]. Доказана теорема существования и исследованы подклассы поверхностей σ, выделяемые специальными свойствами ассоциированных геометрических образов.

§1. Теорема существования

Пусть гладкая нелинейчатая поверхность S отнесена к реперу С. П. Финикова $\{A_\alpha\}$ [3, с. 4—13]. Тогда матрица ее деривационных формул

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \ (\alpha,\beta,\gamma=\overline{0,3}) \tag{1.1}$$

имеет вид (1.2) из [1, с. 65], где

$$\omega_0^i \overset{\text{det}}{=} \omega^i . \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем i, j, k = 1, 2; i ≠ j и по индексам i и j суммирование не производится. Фокусы лучей A_0A_3, A_1A_2

$$\mathcal{F}_i=t_iA_0+A_3,\ \Phi_i=\lambda_kA_k \tag{1.3}$$

и торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_3), (A_1A_2) первых и вторых директрис Вильчинского поверхности S определяются соответственно уравнениями

$$t^2 + (b_1+a_2)t + b_1a_2 - b_2a_1=0, \qquad (1.4)$$

$$a_1\lambda_1^2 + (b_1 - a_2)\lambda_1\lambda_2 - b_2\lambda_2^2=0, \qquad (1.5)$$

$$a_1(\omega^1)^2 + (a_2 - b_1)\omega^1\omega^2 - b_2(\omega^2)^2, \qquad (1.6)$$

где $t = t_1 V t_2$.

Следовательно, торсы этих прямоугольных конгруэнций соответствуют и определяются одним и тем же уравнением (1.6). Из (1.5), (1.6) непосредственно следует

Теорема 1.1. *Фокусы* Φ_1 *и* Φ_2 *тогда и только тогда гармонически делят точки* A_1 *и* A_2, *когда прямолинейная конгруэнция* (A_0A_3) *сопряжена поверхности* S, *а прямолинейная конгруэнция* (A_1A_2) *гармонична ей.*

Определение 1. *Поверхностью* σ *называется поверхность* S *с параболическими конгруэнциями* (A_0A_3) *и* (A_1A_2).

Теорема 1.2. *Поверхности* σ *существуют и определяются в общем случае с произволом пяти функций одного аргумента.*

Доказательство. Из (1.4) и (1.5) следует, что совпадение фокусов $\mathcal{F}_1\equiv \mathcal{F}_2$, $\Phi_1\equiv\Phi_2$ характеризуется одним условием:

$$(a_2 - b_1)^2 + 4a_1b_2=0. \qquad (1.7)$$

Обозначим:

$$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2;\ \Phi \overset{\text{def}}{=} \Phi_1 = \Phi_2. \qquad (1.8)$$

Исключим из рассмотрения проективные сферы [1, с. 65—68], т. е. будем считать

$$|a_1| + |b_2| \neq 0. \qquad (1.9)$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений поверхности σ состоит из конечного соотношения (1.7), пфаффовых уравнений

$$2\omega_0^0 = p_k\omega^k,\ 6\omega_2^2 = p_1\omega^1 - p_2\omega^2,\ \omega_1^0 = a_k\omega^k,\ \omega_2^0 = b_k\omega^k,$$
$$\omega_3^0 = b_2\omega^1 + a_1\omega^2,\ \omega_0^3 = 0,\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \qquad (1.10)$$
$$\omega_i^j = \omega^i,\ \omega_i^3 = \omega^j,\ \omega_3^i = \omega_j^0.$$

$$(a_2 - b_1)(da_2 - db_1) + 2(a_1db_2 + b_2da_1) = 0 \qquad (1.11)$$

и внешних квадратичных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&dp_1\Lambda\, \omega^1 + dp_2\Lambda\, \omega^2 - 2(a_2 - b_1)\, \omega^1\Lambda\omega^2 = 0,\\
&dp_1\Lambda\, \omega^1 - dp_2\Lambda\, \omega^2 - (2/3\, p_1p_2 + 6(b_1 + a_2 - 1))\, \omega^1\Lambda\omega^2 = 0,\\
&da_1\Lambda\, \omega^1 + da_2\Lambda\, \omega^2 + (a_2p_1 - 2/3a_1p_2)\, \omega^1\Lambda\omega^2 = 0, \qquad (1.12)\\
&db_1\Lambda\, \omega^1 + db_2\Lambda\, \omega^2 - 1/3(2b_1p_2 - b_2p_1)\, \omega^1\Lambda\omega^2 = 0,\\
&db_2\Lambda\, \omega^1 + da_1\Lambda\, \omega^2 - (b_2p_2 - a_1p_1)\, \omega^1\Lambda\omega^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим сначала общий случай:

$$a_1b_2 \neq 0. \qquad (1.13)$$

Из (1.11) находим:

$$da_1 = \frac{1}{2b_2}((a_2-b_1)(db_1-da_2) - 2a_1db_2). \qquad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в третье и пятое уравнения системы квадратичных уравнений (1.12), убеждаемся, что

$$s_1=5,\ q=5,\ s_2=0,\ Q=N=5. \qquad (1.15)$$

Следовательно, система (1.10) — (1.12) — в инволюции и определяет поверхность σ с произволом пяти функций одного аргумента.

§2. Поверхности σ_1 и σ_2

При доказательстве теоремы 1.2 мы исключили из рассмотрения поверхности, для которых

$$a_1b_2=0. \qquad (2.1)$$

Геометрически такие поверхности характеризуются тем, что сдвоенная фокальная поверхность прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) является либо поверхностью (A_1), когда

$$a_1=0,\ b_1=a_2,\ b_2\neq 0, \qquad (2.2)$$

либо поверхностью (A_2), когда

$$b_2=0,\ b_1=a_2,\ a_1\neq 0. \qquad (2.3)$$

Поверхности S, характеризуемые условиями (2.2), назовем поверхностями σ_1, а поверхности, характеризуемые условиями (2.3), поверхностями σ_2.

Теорема 2.1. *Поверхности σ_1 существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.*

Осуществляя последовательно продолжения системы (1.10) при условии (2.2), убеждаемся, что

$$p_1=0,\ a_2=1/2. \tag{2.4}$$

При соотношениях (2.4) приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} 2\omega_0^0 = p_2\omega^2,\ \omega_0^0 - 3\omega_1^1 = 0,\ \omega_1^0 = 1/2\omega^2,\ \omega_2^0 = 1/2\omega^1 + b_2\omega^2, \\ \omega_3^0 = b_2\omega^1, \omega_i^j = \omega^i,\ \omega_i^3 = \omega^j,\ \omega_3^i = \omega_j^0,\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_0^3 = 0, 3dp_2 + 5p_2^2\omega^2 = 0,\ 6db_2 = p_2(3\omega^1 - 8b_2\omega^2), \end{cases} \tag{2.5}$$

которая определяет поверхности σ_1.

Теорема 2.2. *Поверхности σ_2 существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.*

Доказательство. Повторяя аналогичные рассуждения, находим

$$p_2=0,\ a_2=1/2. \tag{2.6}$$

Вполне интегрируемая система Пфаффа, определяющая поверхности σ_2, имеет вид:

$$\begin{cases} 2\omega_0^0 = p_1\omega^1,\ \omega_0^0 - 3\omega_2^2 = 0,\ \omega_1^0 = a_1\omega^1 + 1/2\omega^2,\ \omega_2^0 = 1/2\omega^1, \\ \omega_3^0 = a_1\omega 2^2, \omega_i^j = \omega^i,\ \omega_i^3 = \omega^j,\ \omega_3^i = \omega_j^0,\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_0^3 = 0,\ 3dp_1 + 5p_1^2\omega^1 = 0,\ 6da_1 = p_1(3\omega^2 - 8a_1\omega^1). \end{cases} \tag{2.7}$$

§3. Геометрические образы, ассоциированные с поверхностями σ_1 и σ_2

Теорема 3.1. *Прямолинейные конгруэнции* (A_1A_3), (A_2A_3) *ассоциированные и с поверхностью* σ_1 *и с поверхностью* σ_2, *сопряжены поверхности.*

Доказательство. Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций (A_1A_3), (A_2A_3), ассоциированных с поверхностью σ_1, имеют соответственно вид:

$$4b_2(\omega^1)^2-(\omega^2)^2=0,\ \ (\omega^1)^2+4b_2^2(\omega^2)^2=0. \qquad (3.1)$$

Уравнения торсов этих линейных конгруэнций, ассоциированных с поверхностью σ_2, имеют вид:

$$4a_1^2(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=0,\ \ (\omega^1)^2-4a_1(\omega^2)^2=0. \qquad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_3) высекают и на поверхности σ_1, и на поверхности σ_2 сопряженные сети линий. Ч. т. д.

Теорема 3.2. *Фокусы* $\mathcal{F}_{1,i}$ *и* $\mathcal{F}_{2,i}$ *луча* A_iA_3 *прямолинейной конгруэнции* (A_iA_3), *ассоциированной с поверхностью* σ_i, *гармонически делят точки* A_i и A_3.

Доказательство. Используя формулы (2.5), (2.7), находим:

$$\mathcal{F}_{1,1}=\sqrt{b_2}A_1+A_3;\quad \mathcal{F}_{2,1}=-\sqrt{b_2}A_1+A_3; \qquad (3.3)$$

$$\mathcal{F}_{1,2}=\sqrt{a_1}A_2+A_3;\quad \mathcal{F}_{2,2}=-\sqrt{a_1}A_2+A_3. \qquad (3.4)$$

Следовательно,

$$(A_1A_3;\ \mathcal{F}_{1,1}\ \mathcal{F}_{2,1})=-1,\ (A_2A_3;\ \mathcal{F}_{1,2}\ \mathcal{F}_{2,2})=-1. \qquad (3.5)$$

Ч. т. д.

Теорема 3.3. *Касательная плоскость к поверхности* $(\mathcal{F})$, *описанной фокусом луча* $A_0A_3\in(A_0A_3)$, *содержит асимптотическую касательную к поверхности* σ_1 *и поверхности* σ_2. *Одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции* (A_0A_3) *соответствует асимптотической линии этих поверхностей.*

Доказательство. Из (1.4), (2.2), (2.3). (2.4), (2.6) следует, что сдвоенный фокус $\mathcal{F}\in A_0A_3$ определяется формулой

$$\mathcal{F}=-1/2A_0+A_3. \qquad (3.6)$$

Для σ_1

$$d\mathcal{F}=-\omega_0^0\mathcal{F}+(b_2\omega^1-1/2p_2\omega^2)A_0+b_2\omega^2A_1; \qquad (3.7)$$

для σ_2

$$\mathcal{F}=-\omega_0^0\mathcal{F}+(a_1\omega^2-1/2p_1\omega^1)A_0+a_1\omega^1A_2. \qquad (3.8)$$

Дифференцируя (3.7) и (3.8), используя соответственно (2.5) или (2.7), находим уравнение асимптотических линий поверхности $\mathcal{F}$ соответственно в виде:

$$\omega^2(2b_2\omega^1 - \frac{p_2}{2}\omega^2)=0, \qquad (3.9)$$

$$\omega^1(2a_1\omega^2 - \frac{p_1}{2}\omega^1)=0. \qquad (3.10)$$

Из (3.7) — (3.10) непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 3.4. *Касательная плоскость к поверхности* (A_i), *ассоциированной с поверхностью* σ_i, *пересекает первую директрису Вильчинского* A_0A_3 *в точке, гармоничной фокусу* $\mathcal{F}$ *относительно точек* A_0 и A_3.

Доказательство. Имеем:

для σ_1

$$dA_1=1/6p_2\omega^2A_1 + \omega^1A_2 + \omega^2(1/2A_0 + A_3); \qquad (3.11)$$

для σ_2

$$dA_2=1/6p_1\omega^1A_2 + \omega^2A_1 + \omega^1(1/2A_0 + A_3). \qquad (3.12)$$

Из (3.11), (3.12) следует, что точка

$$\mathcal{F}* = -1/2A_0 + A_3 \qquad (3.13)$$

лежит в касательной плоскости к поверхности (A_1), ассоциированной с σ_1, и к поверхности (A_2), ассоциированной с σ_2.

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Конгруэнции и комплексы коник, порождаемые проективной сферой // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 65—74.

2. *Фиников С. П.* Проективно-дифференциальная геометрия / ОНТИ НКТП СССР. М.; Л., 1937.

3. *Малаховский В. С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве: Учеб. пособие. Калининград, 1986.

V. Malakhovsky

ABOUT ONE CLASS OF SURFACES
IN 3-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

In 3-dimensional projective space P_3 a smooth non linear surface σ with parabolic line congruences of the first and the second directrexes of Wilcynski is considered. It is proved, the existence of such surfaces and sum special cases are investigated.

УДК 514.75

В. С. Малаховский, Н. В. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта)

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА *m*-МЕРНОМ НЕВЫРОЖДЕННОМ МНОГООБРАЗИИ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В *n*-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (*m*<*n*)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрено m-мерное многообразие V_m (n - 2)-мерных невырожденных квадрик Q_{n-2} (квадратичных элементов) $(n \geq 3, m < n)$ в предположении, что гиперплоскости квадрик также образуют m-параметрическое семейство и что характеристика гиперплоскости не пересекается со своим полярным относительно Q_{n-2} подпространством.

С использованием компьютерной программы нахождения продолжений и охватов полей геометрических объектов на дифференцируемом многообразии [3, с. 77—107] найдены тензорные и квазитензорные поля на V_m и рассмотрены определяемые ими геометриче-