26. *Кретов М.В., Фунтикова Т.П.* Наш выдающийся современник Владислав Степанович Малаховский: ученый, педагог, гражданин // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 5—13.

M. Kretov, T. Funtikova

Mathematical world of Malakhovsky Vladislav Stepanovich
(*to a 85-anniversary from birthday*)

In article the brief biography of professor V.S. Malakhovsky is stated, scientific and pedagogical work of the scientist for 60 years is analyzed.

УДК 514.764.3

Т.Г. Аленина
Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары

Двойственные пространства аффинной связности, индуцируемые нормализацией $\{T_n^i, T_i\}$ распределения H в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$

Работа посвящена изучению гиперполосного распределения H, погруженного в пространство $\mathrm{M}_{n,n}$.

Ключевые слова: гиперполосное распределение, пространство аффинно-метрической связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J} = \overline{0, n};\ K, L = \overline{1, n};$$

$$i, j, k, s = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{m+1, n}; \quad u, v, w = \overline{m+1, n-1}.$$

Определение. *Под двойственной нормализацией регулярного гиперполосного распределения* H *в пространстве аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *понимают* [2; 3] *нормализацию его базисного распределения в смысле Нордена* [1], *причем в каждом центре* A_0 *нормаль первого рода* N_{n-m} *содержит характеристику* Π_{n-m-1} *текущего элемента, оснащающего распределения гиперплоскостных элементов.*

Требование инвариантности поля нормалей $\mathrm{N}_{n-m} \equiv [\Pi_{n-m-1}, N_n]$, где $N_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^v A_v$, накладывает следующие условия на функции ν_n^i:

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K; \tag{1}$$

на функции ν_n^v это требование никаких условий не накладывает. Но если потребовать инвариантность прямой $h \equiv [A_0 N_n]$, то функции ν_n^v должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla \nu_n^v + \omega_n^v = \nu_{nK}^v \omega_0^K.$$

Следовательно, в качестве ν_n^v можно взять квазитензор первого порядка a_n^v. Принимая в качестве точки N_n разложение

$$N_n = A_n + \nu_n^i A_i + a_n^v A_v, \tag{2}$$

где функции ν_n^i удовлетворяют уравнениям (1), одновременно с инвариантностью поля нормалей $\mathrm{N}_{n-m}(\nu)$ мы добиваемся инвариантности поля прямых $h(\nu) \equiv [A_0 N_n(\nu)]$; в дальнейшем предполагается, что точка N_n имеет разложение (2).

Таким образом, ниже под полем инвариантных нормалей первого рода $\mathrm{N}_{n-m}(\nu)$ гиперполосного распределения H в пространстве $\mathrm{M}_{n,n}$ будем понимать поле соответствующего квазитензора ν_n^i.

Нормаль второго рода N_{m-1} натянута на точки $N_i = A_i + \nu_i^0 A_0$; требование инвариантности поля $\mathrm{N}_{m-1}(\nu)$ равносильно тому, что функции ν_i^0 удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \nu_i^0 + \omega_i^0 \left(\equiv 0\right) = \nu_{iK}^0 \omega_0^K. \tag{3}$$

Условием взаимности (полярно сопряженности) [50] двойственной нормализации $\left(\nu_n^i, \nu_i\right)$ относительно поля локальных абсолютов Q_{n-1}^2 является выполнение следующих соотношений:

$$g_{i0} + c\nu_i = 0,\ a_{ij}\nu_n^j + a_{in} = 0,\ a_{i\nu} = 0. \tag{4}$$

Продолжая уравнения (1), имеем

$$\nabla \nu_{nS}^i + \nu_n^i \Lambda_{jS}^n \omega_n^j - \nu_n^j \Lambda_{jS}^n \omega_n^i + \nu_n^i A_{uS}^n \omega_n^u - N_{uS}^i \omega_n^u = \nu_{nST}^i \omega_0^T, \tag{5}$$

где

$$2\nu_{n[ST]}^i = \frac{1}{c}\nu_{n[S}^i g_{T]0} - \nu_n^i R_{nST}^n + \nu_n^j R_{jST}^i - \nu_{nK}^i R_{0ST}^K + R_{nST}^i.$$

Если в качестве нормалей первого и второго рода взять нормали, определяемые соответственно функциями

$$\begin{aligned} &T_n^i \overset{def}{=} -a_n^{ij}\frac{a_j}{m+2}, \quad \nabla T_n^i + \omega_n^i = T_{nK}^i \omega_0^K, \\ &T_i = -\frac{g_{i0}}{c(m+2)}, \quad \nabla T_i + \left(\omega_i^0 \equiv 0\right) = T_{iK}\omega_0^K, \end{aligned} \tag{6}$$

то эти поля являются взаимными относительно поля соприкасающихся гиперквадрик, ибо выполняется условие взаимности:

$$T_i = \frac{X_i}{m+2} + a_{ij}^n T_n^j. \tag{7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема I. *Нормализация* $\{T_n^i, T_i\}$ *регулярного гиперполосного распределения* m*-мерных линейных элементов* H*, вложенного в пространство аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *с полем локальных гиперквадрик, является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик* $\tilde{Q}_{n-1}$.

В уравнениях (6) функции T_{nK}^i, T_{iK}, имеют следующие строения:

$$T_{nK}^i = -\frac{1}{m+2} a_n^{is} (a_j a_n^{tj} a_{stK}^n + a_{sK}),$$
$$T_{iK} = -\frac{1}{c(m+2)} \left(a_{iK} + g_{\alpha 0} \Lambda_{iK}^{\alpha} \right). \tag{8}$$

Возьмем систему форм Пфаффа $\left\{ \omega_0^J, \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_{\bar{j}}^{i} \right\}$, где

$$\overset{1}{\tilde{\theta}}{}_0^i = \omega_0^i - T_n^i \omega_0^n,$$
$$\overset{1}{\tilde{\theta}}{}_j^i = \omega_j^i - T_n^i \omega_j^n + \frac{1}{c} \delta_j^i g_{K0} \omega_0^K + \delta_j^i \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_0^k T_k - \tag{9}$$
$$- N_{vj}^i \omega_0^v - \left(T_{nj}^i - \Lambda_{kj}^n T_n^k T_n^i \right) \omega_0^n + T_j \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_0^i;$$

эта система удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева:

$$D \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_0^i = \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_0^k \wedge \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_k^i + \frac{1}{2} \overset{1}{\tilde{r}}{}_{ST}^{i} \omega_0^S \wedge \omega_0^T, \ D \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_j^i = \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_j^k \wedge \overset{1}{\tilde{\theta}}{}_k^i + \frac{1}{2} \overset{1}{\tilde{r}}{}_{jST}^{i} \omega_0^S \wedge \omega_0^T, \tag{10}$$

где функции $\overset{1}{\tilde{r}}{}_{ST}^{i}, \overset{1}{\tilde{r}}{}_{jst}^{i}$ имеют строения

$$\overset{1}{\tilde{r}}{}_{ST}^{i} = \left[N_{uv}^i \delta_{[S}^u \delta_{T]}^v - T_n^k T_n^i \Lambda_{ku}^n \delta_{[S}^n \delta_{T]}^u + T_n^k N_{uk}^i \delta_{[S}^n \delta_{T]}^n + \right.$$
$$\left. + N_{un}^i \delta_{[S}^u \delta_{T]}^n - T_{nu}^i \delta_{[S}^u \delta_{T]}^n - T_n^i A_{u\alpha}^n \delta_{[S}^{\alpha} \delta_{T]}^u \right] + R_{0ST}^i - T_n^i R_{0ST}^n, \tag{11}$$

$$\overset{1}{\tilde{r}}{}^{i}_{jst} = 2\Big[\Lambda^{u}_{j[s}N^{i}_{|u|t]} + \Lambda^{n}_{j[s}T^{i}_{|n]t|} - \delta^{i}_{j}T_{[st]} - \frac{1}{c}\delta^{i}_{j}g_{0[s}T_{t]} - N^{i}_{uj}\Lambda^{u}_{[st]} +$$
$$+\left(-\delta^{i}_{j}T_{k}T^{k}_{n} - T^{i}_{nj} + \Lambda^{n}_{kj}T^{k}_{n}T^{i}_{n}\right)\Lambda^{n}_{[st]} + T_{j[s}\delta^{i}_{t]} - \frac{1}{c}T_{j}g_{0[s}\delta^{i}_{t]} - \qquad (12)$$
$$- \; T^{k}_{n}T^{i}_{n}\Lambda^{n}_{j[s}\Lambda^{n}_{|k]t|} + T_{k}T^{k}_{n}\Lambda^{n}_{j[s}\delta^{i}_{t]}\Big] \quad + R^{i}_{jst} - T^{i}_{n}R^{n}_{jst} + \frac{1}{2c}\delta^{i}_{j}g_{K0}R^{K}_{0st} -$$
$$-N^{i}_{uj}R^{u}_{0st} + \delta^{i}_{j}T_{k}R^{k}_{0st} \quad -\left(T^{i}_{nj} + \delta^{i}_{j}T_{k}T^{k}_{n} - \Lambda^{n}_{kj}T^{k}_{n}T^{i}_{n} + T_{j}T^{i}_{n}\right)R^{n}_{0st} + T_{j}R^{i}_{0st}.$$

Следовательно, система форм (9) вместе с $\{\omega^{I}_{0}\}$ определяет пространство аффинной связности $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,m}$, тензор кручения $\overset{1}{\tilde{r}}{}^{i}_{ST}$ и подтензор $\overset{1}{\tilde{r}}{}^{i}_{jst}$ тензора кривизны $\overset{1}{\tilde{r}}{}^{i}_{jST}$ имеют строения (12).

В силу соотношений (11) функции

$$\overline{T}^{i}_{n} = -\Lambda^{ij}_{n}T_{j}, \quad \overline{T}_{i} = \Lambda^{n}_{ji}T^{j}_{n} \qquad (13)$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} d\overline{T}^{i}_{n} - \overline{T}^{i}_{n}\overline{\omega}^{n}_{n} + \overline{T}^{s}_{n}\overline{\omega}^{i}_{s} + \overline{\omega}^{i}_{n}\left(\equiv 0\right) &= \overline{T}^{i}_{nK}\overline{\omega}^{K}_{0}, \\ d\overline{T}_{i} - \overline{T}_{s}\overline{\omega}^{s}_{i} + \overline{\omega}^{0}_{i} &= \overline{T}_{iK}\overline{\omega}^{K}_{0}, \end{aligned} \qquad (14)$$

где

$$\overline{T}^{i}_{nK} = \Lambda^{ij}_{n}\left(T_{j}\frac{g_{K0}}{c} - T_{jK}\right), \; \overline{T}_{iK} = \Lambda^{n}_{ji}\left(\frac{L_{K}}{n+1}T^{j}_{n} + T^{j}_{nK}\right). \qquad (15)$$

По аналогии с (9) возьмем систему форм Пфаффа $\left\{\overline{\omega}^{J}_{0}, \overset{2}{\tilde{\theta}}{}^{i}_{\bar{j}}\right\}$, где

$$\overset{2}{\tilde{\theta}}{}^{i}_{0} = \overline{\omega}^{i}_{0} - \overline{T}^{i}_{n}\overline{\omega}^{n}_{0}$$
$$\overset{2}{\tilde{\theta}}{}^{i}_{j} = \overline{\omega}^{i}_{j} - \overline{T}^{i}_{n}\overline{\omega}^{n}_{j} + \frac{1}{c}\delta^{i}_{j}\overline{g}_{K0}\overline{\omega}^{K}_{0} + \delta^{i}_{j}\overset{2}{\tilde{\theta}}{}^{k}_{0}\overline{T}_{k} - \qquad (16)$$
$$-\overline{N}^{i}_{vj}\overline{\omega}^{v}_{0} - \left(\overline{T}^{i}_{nj} - \overline{\Lambda}^{n}_{kj}\overline{T}^{k}_{n}\overline{T}^{i}_{n}\right)\overline{\omega}^{n}_{0} + \overline{T}_{j}\overset{2}{\theta}{}^{i}_{0}.$$

Согласно (12) система форм (16) вместе с $\{\omega_0^I\}$ удовлетворяет структурным уравнениям пространства аффинной связности

$$D\overset{2}{\tilde{\theta}}{}_0^i = \overset{2}{\tilde{\theta}}{}_0^k \wedge \overset{2}{\tilde{\theta}}{}_k^i + \frac{1}{2}\overset{2}{\tilde{r}}{}^i_{ST}\ \omega_0^S \wedge \omega_0^T,$$
$$D\overset{2}{\tilde{\theta}}{}_j^i = \overset{2}{\tilde{\theta}}{}_j^k \wedge \overset{2}{\tilde{\theta}}{}_k^i + \frac{1}{2}\overset{2}{\tilde{r}}{}^i_{jST}\ \omega_0^S \wedge \omega_0^T, \tag{17}$$

где функции $\overset{2}{\tilde{r}}{}^i_{jst}$ имеют строение

$$\overset{2}{\tilde{r}}{}^i_{jst} = 2\Big[\Lambda^n_{kj}\Lambda^{il}_n N^k_{v[s}\Lambda^v_{|l|t]} - \frac{1}{c}\Lambda^{il}_n T_l \Lambda^n_{[s|j|}g_{t]0} + \Lambda^{il}_n\Lambda^n_{[s|j|}T_{|l|t]} - \delta^i_j T^l_n \Lambda^n_{l[s}L_{t]} -$$
$$-\delta^i_j\Lambda^n_{l[s}T^l_{|n|t]} - \frac{1}{n+1}\delta^i_j T^l_n L_{[s}\Lambda^n_{|l|t]} + \Big(\delta^i_j T^l_n T_l - \frac{1}{c}g_{j0}\Lambda^{il}_n T_l + \Lambda^{il}_n T_{lj} -$$
$$T_j\Lambda^{il}_n T_l\Big)\Lambda^n_{[st]} - \Lambda^{ik}_n\Lambda^w_{kj}N^l_{w[t}\Lambda^n_{|l|s]} + \Lambda^n_{lj}T^l_{n[s}\delta^i_{t]} - \Lambda^{il}_n T_l T_{[t}\,\Lambda^n_{s]j} - T^l_n T_l \Lambda^n_{[s|j|}\delta^i_{t]}\Big] +$$
$$+\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{lj}R^l_{kst} - \Lambda^{il}_n T_l \Lambda^n_{kj}R^k_{0st} + \left(\delta^i_j T^l_n + \Lambda^n_{kj}T^k_n\Lambda^{il}_n + \frac{1}{2(n+1)}\delta^i_j L_k\Lambda^{kl}_n\right)R^n_{lst} +$$
$$+\Big[\delta^i_j T^l_n T_l - \frac{1}{c}g_{j0}\Lambda^{il}_n T_l + \Lambda^{il}_n T_{lj} - T_j\Lambda^{il}_n T_l + \Lambda^n_{lj}T^l_n\Lambda^{ik}_n T_k -$$
$$-\frac{1}{2(n+1)}\Big(\delta^i_j L_l\Lambda^{lk}_n\Lambda^n_{kn} - \delta^i_j L_l\Lambda^{lk}_n\Lambda^n_{ku}A^{uw}_n A^n_{wn} + \delta^i_j L_u A^{uw}_n A^n_{wn} - \delta^i_j L_n\Big)\Big]R^n_{0st} +$$
$$+\left(\Lambda^{ik}_n\Lambda^w_{kj} + \frac{1}{2(n+1)}\delta^i_j L_u A^{uw}_n - \frac{1}{2(n+1)}\delta^i_j L_k\Lambda^{kl}_n\Lambda^n_{lu}A^{uw}_n\right)R^n_{wst}.$$

Из строений (9), (16) форм $\overset{1}{\tilde{\theta}}{}^i_j, \overset{2}{\tilde{\theta}}{}^i_j$ находим

$$\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + \Lambda^{is}_n\Lambda^n_{sjK}\omega^K_0 + \left(-\Lambda^{il}_n T_l\Lambda^n_{kj} + \delta^i_j\Lambda^n_{lk}T^l_n + \delta^i_k\Lambda^n_{lj}T^l_n\right)\omega^k_0 +$$
$$+\left(\delta^i_j T^k_n\Lambda^n_{ku} + A^n_{vu}\Lambda^{ik}_n\Lambda^v_{kj} + T^s_n\Lambda^n_{sj}\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{ku}\right)\omega^u_0 +$$
$$+\Big(\delta^i_j T^k_n\Lambda^n_{kn} + \delta^i_j T_s T^s_n + A^n_{vn}\Lambda^{ik}_n\Lambda^v_{kj} - \frac{1}{c}\Lambda^{is}_n T_l g_{j0} + \tag{18}$$
$$+\Lambda^{is}_n T_{sj} - T_j\Lambda^{ik}_n T_k + \Lambda^n_{sj}T^s_n\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{kn} + \Lambda^n_{kj}T^k_n\Lambda^{is}_n T_s\Big)\omega^n_0.$$

Имеют место дифференциальные уравнения

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{2}{\tilde{\theta}}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{1}{\tilde{\theta}}{}^k_i = \Lambda^n_{ij}\Theta + c^n_{iju}\omega^u_0 + f_{ij}\omega^n_0, \tag{19}$$

где

$$\Theta = -\omega^n_n - \frac{1}{c}g_{\alpha 0}\omega^\alpha_0 + \frac{1}{n+1}L_s\omega^s_0 + \frac{1}{n+1}L_s\Lambda^{sk}_n\Lambda^n_{k\alpha}\omega^\alpha_0,$$

$$c^n_{iju} = -\Lambda^v_{ij}A^n_{vu} + \Lambda^n_{kj}N^k_{ui},$$

$$f_{ij} = \Lambda^n_{kj}T^k_{ni} - \Lambda^n_{kj}\Lambda^n_{si}T^s_nT^k_n - \Lambda^v_{ij}A^n_{vn} + T_i\frac{g_{j0}}{c} - T_{ij} + T_iT_j.$$

Из выражений (19) следует, что двойственные аффинные связности $\overset{1}{\tilde{\nabla}}$ и $\overset{2}{\tilde{\nabla}}$ обобщенно сопряжены относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой, принадлежащей распределению H в $\mathrm{M}_{n,n}$.

Теорема II. *Нормализация* $\{T^i_n, T_i\}$ *регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* H*, погруженного в пространство аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *взаимна относительно поля соприкасающихся гиперквадрик, индуцирует два двойственных пространства аффинной связности* $\overset{1}{\tilde{\mathrm{A}}}_{n,m}$ *и* $\overset{2}{\tilde{\mathrm{A}}}_{n,m}$*, определяемые системами форм соответственно, (9) и (16); связности* $\overset{1}{\tilde{\nabla}}$ *и* $\overset{2}{\tilde{\nabla}}$ *обобщенно сопряжены относительно поля основного тензора* Λ^n_{ij} *вдоль любой кривой, принадлежащей базисному распределению многообразия* H *в* $\mathrm{M}_{n,n}$.

Список литературы

1. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

2. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

3. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т. 28, №4. С. 151—157.

T. Alenina

Dual spaces of affine connection induced by the normalization $\{T_n^i, T_i\}$ of distribution H in the space $\mathrm{M}_{n,n}$

This work is devoted to regular hyperband distribution H in the space of affine-metric connection $\mathrm{M}_{n,n}$.

УДК 514.75

О. О. Белова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассмаподобном многообразии центрированных плоскостей

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. Над ним возникает некоторое главное расслоение, в котором задается аналог связности Нейфельда. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует данную связность.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, главное расслоение, аналог сильной нормализации Нордена, связность Нейфельда.