2/Для конгруэнции K_2^0 ; а/ фокальные точки A_i являются трехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_2^0$; б/прямолинейные конгруэнции (A_0A_i) и (A_jA_3) двусторонне расслояемы.

3/Для конгруэнции K_0^2, являющейся конгруэнцией квадрик Ли своей фокальной поверхности (A_0): а/квадрика Q_i распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j, являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0); б/точка A_i является двухкратной фокальной точкой квадрики $Q_i \in K_0^2$; в/фокальные линии (A_i) являются прямыми, проходящими через точку A_0+A_3; г/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

4/Для конгруэнции K_1^1: 1/точка A_1 является двукратной фокальной точкой квадрики $Q \in K_1^1$; 2/фокальная поверхность (A_0)-торс; 3/если A_3 -фокальная точка квадрики $Q \in K_1^1$, то (A_2) -сдвоенная фокальная линия.

Т е о р е м а 2. Если ассоциированная квадрика Q_i является конусом с вершиной в точке A_i, то конгруэнции K_p^q характеризуются следующими свойствами: 1/торсы прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) соответствуют координатной сети $\omega^1\omega^2=0$; 2/для конгруэнции K_2^0 точки A_i являются трехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_2^0$; 3/для конгруэнции K_0^2: а/точки A_i являются четырехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_0^2$; б/конгруэнции (A_0A_i) и (A_3A_i) -параболические со сдвоенным фокусом A_i; в/фокальные линии (A_1) и (A_2) -плоские; 4/для конгруэнции K_1^1: а/фокальная линия (A_2)-сдвоенная, плоская; б/конгруэнции (A_0A_2) и (A_3A_2)-параболические со сдвоенным фокусом A_2.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8. Калининград, 1977, с.32-38.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 14 1983

УДК 514.75

Г.Л. С в е ш н и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции G кривых второго порядка C [1], причем каждая из двух невырождающихся фокальных поверхностей является сдвоенной.

Отнесем конгруэнцию G к реперу $R=\{A_\alpha\}$, $\alpha,\beta,...=\overline{1,4}$. Вершины A_1 и A_2 репера R совмещаются с фокальными точками коники C, описывающими сдвоенные невырождающиеся поверхности, вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно коники. Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), $i,j,k=1,2$ в точках A_i, B_i -точка пересечения прямой ℓ с касательной к линии $\omega_j^4=0$ на поверхности (A_i). Вершину A_4 выбираем на линии ℓ так, чтобы она гармонически делила вместе с точкой A_3 точки B_i.

Уравнения коники C относительно данного репера при соответствующей нормировке вершин репера записываются в виде:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0 .$$

Конгруэнция G определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^j=0, \quad \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k, \quad \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2,$$
$$\omega_3^1=\Gamma_2^{31}\omega_1+\Gamma_3^{12}\omega_2, \quad \omega_3^2=\Gamma_3^{21}\omega_1+\Gamma_1^{32}\omega_2,$$
$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k, \tag{1}$$
$$\omega_4^1=\Gamma_2^{31}(\Gamma_3^{12}+\Gamma_1^{31})\omega_1+\Gamma_4^{12}\omega_2, \quad \omega_4^2=\Gamma_4^{21}\omega_1+\Gamma_1^{32}(\Gamma_3^{21}-\Gamma_1^{31})\omega_2$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (I). Здесь формы $\omega_i^4 = \omega_i$ приняты в качестве базисных, причем $i \neq j$, и суммирование по индексам i, j не производится.

Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнция G существует с произволом четырех функций двух аргументов.

Назовем конгруэнцией G_0 такую невырожденную конгруэнцию кривых второго порядка со сдвоенными фокальными поверхностями, у которой асимптотические линии фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) гармонически делят координатную сеть, т.е. имеют вид $(\omega_1)^2 - (\omega_2^2)^2 = 0$.

Конгруэнции G_0 выделяются из конгруэнций G конечными соотношениями:

$$\Gamma_4^{ii} + \Gamma_j^{3i}\left(\Gamma_3^{ij} + (-1)^i \Gamma_1^{31}\right) = 0,$$
$$\Gamma_4^{ij} + (-1)^i \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{ij} + (\Gamma_j^{3i})^2 = 0. \tag{2}$$

Учитывая равенства (2) в системе (1) и осуществляя нормировки вершин репера, полагая

$$\Gamma_1^{31} = 1, \quad \Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{31} = 0, \tag{3}$$

получаем систему уравнений Пфаффа для конгруэнции G_0 в виде:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^j \omega_i + \omega_3^j; \quad \omega_3^i = (-1)^i \Gamma_1^{32}\omega_1,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^i = -\Gamma_1^{32}\omega_i - (\Gamma_1^{32})^2\omega_j,$$
$$\omega_4^3 = \left(1 - (\Gamma_1^{32})^2\right)\omega_3^4 + b^2\omega_3^1 - b^1\omega_3^2,$$
$$\omega_1^1 = \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = b^k\omega_k, \tag{4}$$
$$\omega_3^3 - \omega_4^4 = c^k\omega_k,$$
$$d\Gamma_1^{32} + \Gamma_1^{32}(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + 2\Gamma_1^{32}(-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{42} + \Gamma_3^{41} - b^1)\omega_1 +$$
$$+ 2\Gamma_1^{32}(\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{42})\omega_2 = 0,$$

где

$$c^i = -a^j\Gamma_1^{32} + (-1)^j 2\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{4j} + (-1)^i\Gamma_3^{4i}\left(1 + (\Gamma_1^{32})^2\right) + (-1)^j\Gamma_4^{3i}. \tag{5}$$

Доказано, что конгруэнции G_0 существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Т е о р е м а. Конгруэнции G_0 обладают следующими геометрическими свойствами: 1/фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) гармонически делят точки A_3 и A_4; 2/торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют; 3/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) соответствуют фокальной сети; 4/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_4) соответствуют; 5/асимптотические касательные к линии $\omega_1 - \omega_2 = 0$ $(\omega_1 + \omega_2 = 0)$ на фокальных поверхностях (A_1) и (A_2) гармонически делят точки A_3 и A_4; 6/асимптотические касательные фокальной поверхности (A_1) (соответственно (A_2)) гармонически делят точки E_{34} и A_3 (соответственно E_{34}^* и A_3), где E_{34} и E_{34}^* -точки пересечения касательных к линиям $\omega_j = 0$ на поверхности (A_i); 7/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Фокальные точки $\lambda A_3 + \mu A_4$ луча A_3A_4 определяются уравнением

$$\lambda^2 - \left(1 - (\Gamma_1^{32})^2\right)\mu^2 = 0,$$

откуда следует, что фокусы луча A_3A_4 гармонически разделяют вершины A_3 и A_4.

2/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) определяются одним и тем же уравнением

$$\Gamma_1^{32}(\omega_1)^2 + 2\omega_1\omega_2 + \Gamma_1^{32}(\omega_2)^2 = 0,$$

значит, они соответствуют.

3/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_3) имеют вид $\omega_1\omega_2 = 0$,

т.е. соответствуют фокальной сети.

4/Торсы конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4) определяются уравнением

$$(\omega_1+\Gamma_1^{32}\omega_2)(\Gamma_1^{32}\omega_1+\omega_2)=0,$$

значит, они соответствуют.

5/

$$dA_i\Big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_i^i A_i+(-1)^j\omega_1\left((1+\Gamma_1^{32})A_3+(-1)^j A_4\right),$$

$$dA_i\Big|_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_i^i A_i+\omega_1\left((1-\Gamma_1^{32})A_3+(-1)^j A_4\right),$$

что и доказывает утверждение 5.

6/

$$dA_1\Big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_1^1 A_1+\omega_1\left(E_{34}+\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

$$dA_1\Big|_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_1^1 A_1+\omega_1\left(E_{34}-\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

$$dA_2\Big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_2^2 A_2-\omega_1\left(E_{34}^*+\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

$$dA_2\Big|_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_2^2 A_2+\omega_1\left(E_{34}^*-\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

где $\quad E_{34}=A_3+A_4;\quad E_{34}^*=A_3-A_4.$

Из этих равенств следует справедливость утверждения 6.

7/Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)

$$\omega_i^3\wedge\omega_3^j+\omega_i\wedge\omega_4^j=0,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2\wedge\omega_4^2=0$$

тождественно удовлетворяются в силу системы уравнений (4). Теорема доказана.

Если положить $\Gamma_1^{32}=1$, точка $E_{12}=A_1+A_2$ будет сдвоенным фокусом луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). Назовем конгруэнцией G_1 такую конгруэнцию G_0, для которой касательная плоскость поверхности (E_{12}^*) инцидентна прямой A_3A_4, причем $(A_1A_2;E_{12}E_{12}^*)=-1$.

Учитывая в системе (4) условия определения конгруэнции G_1, получаем для конгруэнции G_1 систему уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^j(\omega_1+\omega_2);\quad \omega_3^i=(-1)^i\omega_i,$$

$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\ \omega_4^1=\omega_4^2=-\omega_1-\omega_2,\ \omega_1^1-\omega_2^2=\omega_4^3,$$

$$\omega_4^3=2(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})(\omega_1-\omega_2);\ \omega_1^1+\omega_2^2=0,\ 2\omega_3^3=-a^1(\omega_1+\omega_2)$$

и конечное соотношение

$$a^1(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})=0.$$

Существуют три класса конгруэнций G_1: конгруэнции G_1^1, для которых $a^1=0$, $\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42}=0$, определяемые с произволом одной функции одного аргумента; конгруэнции G_1^2, для которых $a^1=0$, $\Gamma_3^{41}+\Gamma_3^{42}=0$, определяемые тоже с произволом одной функции одного аргумента; конгруэнции G_1^3, для которых $\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42}=0$, их произвол существования – две функции одного аргумента.

Для конгруэнции G_1^1 получены соприкасающиеся квадрики Ли Q_i сдвоенных фокальных поверхностей (A_i). Их уравнения имеют вид:

$$2x^1x^2-2(x^j)^2-(x^3)^2+(-1)^j 2x^3x^4=0.$$

Коника C_i, являющаяся линией пересечения квадрики Ли Q_i плоскостью $x^4=0$, имеет точку A_i двукратным, а точку E_{12} четырехкратным фокусом.

Для поверхности (E_{12}^*) квадрика Ли Q_3 имеет уравнение

$$(x^1)^2-(x^2)^2+2x^3x^4=0.$$

При пересечении квадрики Ли Q_3 с плоскостью $x^i=0$ получается коника, для которой точка A_4 является шестикратным фокусом.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.– Тр. Томского ун-та, I68, Геометр. сб., вып.3, I963, с.43-53.