ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 13 1982

С.В.Киреева

ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ Σ_n^{n-1} В ПРОСТРАНСТВЕ P_n.

Данная статья посвящена изучению сетей Σ_n^{n-1} индекса $n-1$ в проективном пространстве P_n. Рассмотрена геометрия гармонической плоскости $\Pi(A)$, корреляции $\mathcal{K}_\psi$, $\mathcal{K}_\varphi$, связанные с асимптотической квадрикой K_ψ^2 поверхности V_{n-1} и квадрикой Риччи $K_\varphi=\{\varphi=0\}\cap\Pi(A)$.

1. Рассмотрим плоскую сеть Σ_n^{n-1} индекса $(n-1)$ [1], заданную в проективном пространстве P_n. С точкой $A\in\Sigma_n$ свяжем проективный репер $\mathcal{R}=\{A, A_\alpha \mid A_\alpha=F_\alpha, \alpha,\beta=\overline{1,n}\}$, где F_α -гармонический полюс точки A относительно псевдофокусов F_α^β, $\alpha\neq\beta$ [1]. Имеем $\mathcal{D}A=\omega_0^0 A+\omega^\alpha A_\alpha$; $dA_\alpha=\omega_\alpha^0 A+\omega_\alpha^\beta A_\beta$, где формы ω удовлетворяют известным уравнениями структуры проективного пространства. Так как индекс сети Σ_n^{n-1} равен $n-1$, то формы ω_α^0 линейно зависимые. Будем считать, что форма ω_n^0 является линейной комбинацией предыдущих форм:

$$\omega_n^0=\lambda_n^i\omega_i^0 \quad (i,j,k=\overline{1,n}),$$
$$d\lambda_n^i=\lambda_n^i(\bar\omega_n^n-\bar\omega_i^i)+\omega_n^i-\lambda_n^k\omega_k^i-\lambda_n^k\lambda_n^i\omega_k^n+\lambda_n^{ij}\omega_j^0;\ \lambda_n^{ij}=\lambda_n^{ji}. \tag{1}$$

Произвол существования такой сети известен [4]: $S_n=n(n-1)-1$ функций n аргументов. Для них существует особое I-распределение Δ_1. Множество гармонических плоскостей [3] $\Pi(A)=(F_1F_2\ldots F_n)$ огибает некоторую гиперповерхность V_{n-1}, которая описывается точкой $B_n=A_n-\lambda_n^i A_i$. Каждая прямая особого I-распределения Δ_1 определяет на плоскости $\Pi(A)$ точку Q, координаты $(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n)$ которой удовлетворяют системе уравнений $\omega_\beta^0=0$. Дифференциал точки B_n определяется следующим образом: $dB_n=(\omega_n^n-\lambda_n^i\omega_i^n)B_n-\lambda_n^{ij}\omega_j^0 A_i$.

Рассмотрим точки M_α: $M_\alpha=\lambda_n^{ji}a_{i\alpha}^0 A_j$, $(\omega_i^0=a_{i\alpha}^0\omega^\alpha)$. (2)
Индексы принимают следующие значения: $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\delta=\overline{1,n}$; $i,j,k=\overline{1,n-1}$. Теперь дифференциал dB_n точки B_n можно записать иначе:

$$dB_n=(\omega_n^n-\lambda_n^i\omega_i^n)B_n-\omega^\alpha M_\alpha. \tag{3}$$

Если точка A описывает линию ω^α n-мерной сети Σ_n^{n-1}, то точка B_n в общем случае описывает линию θ^α n-мерной ткани $\mathfrak{M}_n$ на поверхности V_{n-1} с касательными $(B_n M_\alpha)$. Из формул (2) следует, что точки M_α линейно зависимые. Можно показать, что коэффициентами их линейной зависимости являются координаты $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ точки Q

$$d^\xi M_\xi=0. \tag{*}$$

Если особое направление (AQ) совпадает с направлением (AF_{ξ_0}) (F_{ξ_0} -гармонический полюс, ξ_0-фиксировано, $\xi_0=1,\ldots,n$), то ткань $\mathfrak{M}_n$ вырождается в сеть с касательными $(B_n M_\gamma)$ $(\gamma=\overline{1,n};\ \gamma\neq\xi_0)$. Это следует из того, что при смещении точки A в особом направлении $(AQ)=(AF_{\xi_0})$ точка B_n остается неподвижной. Показано, что особое направление-единственное направление смещения точки A, при котором точка B_n неподвижна. Только какие-нибудь две линии θ^{β_0}, θ^{γ_0} на поверхности V_{n-1} могут совпадать между собой. При этом точка Q особого направления лежит на прямой $(F_{\beta_0}, F_{\gamma_0})$, соединяющей гармонические полюсы F_{β_0}, F_{γ_0}. Обратное утверждение тоже справедливо. Три или большее число линий совпадать между собой не могут, так как это приведет к понижению индекса сети.

2. Если в равенстве (*) $\alpha^n\neq 0$, то $M_n=-\frac{\alpha^i}{\alpha^n}M_i$, $dB_n=\varphi B_n-\overset{*}{\omega}{}^i M_i$, где $\overset{*}{\omega}{}^i=\omega^i-\frac{\alpha^i}{\alpha^n}\omega^n$. Пусть точка B_n перемещается в направлении $(B_n N)$, где

$$N=m^i M_i. \tag{4}$$

Тогда
$$\overset{*}{\omega}{}^i=\theta m^i. \tag{5}$$

в системе (5) $(n-1)$ уравнение с $n+1$ неизвестными ω_i^α, θ.

Она определяет на гармонической плоскости $\Pi(A)$ прямую l. Координаты $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ точки Q и точки

$$N^* = m^i A_i \qquad (6)$$

удовлетворяют системе (5).

Итак, прямой $(B_n N)$ можно поставить в соответствие прямую $(Q N^*)$, причем точки N, N^* имеют одинаковые координаты в реперах $\{M_i\}, \{A_i\}$. Для сетей Σ_3^2 в 2-мерной гармонической плоскости это привело к образованию новой кривой второго порядка $\bar{k}^2$ и введению нового класса сетей: биоавтополярных сетей [5]. В случае $n > 3$ прямые $(B_n N), (Q N^*)$ в общем случае скрещиваются, поэтому можно рассмотреть семейство прямых $(N N^*)$.

Уравнение поверхности V_{n-1} в репере $R_{V_{n-1}} = \{B_n, A_i\}$ принимает вид $\varphi_n^0 = 0$, $\varphi_n^0 = \omega_n^0 - \lambda_n^i \omega_i^0$. Продолжив это уравнение, находим: $\varphi_i^0 = b_{ij}^0 \varphi_n^j$; $b_{ij}^0 = b_{ji}^0$. Пусть $\|\tilde{\lambda}_{ij}^n\| = \|\lambda_n^{ji}\|^{-1}$, тогда $b_{ij}^0 = -\tilde{\lambda}_{ij}^n$. Уравнение асимптотического конуса поверхности V_{n-1} в репере $R_{V_{n-1}}$ следующее: $\tilde{\lambda}_{ij}^n y^i y^j = 0$. В плоскости $(F_1 F_2 \dots F_{n-1})$ асимптотический конус высекает квадрику K_ψ^2, которую будем называть асимптотической. Пусть M_1^*, M_2^* — точки пересечения асимптотической квадрики и прямой $(N N^*)$. Справедлива теорема:

Т е о р е м а. Если точка N^* лежит на пересечении квадрики Риччи $K_\varphi = \{\omega^\alpha \omega_\alpha^0 = 0\} \cap \Pi(A)$ и плоскости $(F_1 F_2 \dots F_{n-1})$, то четверка точек N, N^*, M_1^*, M_2^* — гармоническая.

Это утверждение верно и при $\alpha^n = 0$. Этой теореме можно придать другой вид.

Т е о р е м а. Если точка N^* лежит на пересечении квадрики Риччи и плоскости $(F_1 F_2 \dots F_{n-1})$, то точка N принадлежит поляре точки N^* относительно асимптотической квадрики K_ψ^2.

3. Рассмотрим $(n-2)$-плоскость $(F_1 F_2 \dots F_{n-1})$, содержащую точки $M_1, M_2, \dots M_n$. Образы $K_\psi(M_\alpha)$ точек M_α в корреляции K_ψ относительно асимптотической квадрики K_ψ^2 будут иметь следующие уравнения:

$$\tilde{\lambda}_{ij}^n x_\alpha^j x^i = 0, \quad x_\alpha^j = \lambda_n^{jk} a_{k\alpha}^0. \qquad (7)$$

Так как матрицы $\|\tilde{\lambda}_{ij}^n\|, \|\lambda_n^{jk}\|$ взаимно обратные, то уравнения (7) принимают вид:

$$a_{i\alpha}^0 x^i = 0.$$

Т е о р е м а. Пересечение $(n-2)$-плоскости $(F_1 F_2 \dots F_{n-1})$ с образами гармонических полюсов F_α в корреляции K_φ относительно квадрики Риччи K_φ совпадает с образами точек M_α в корреляции K_ψ относительно асимптотической квадрики K_ψ^2.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.-Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1965, № 243, с.29-37.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многообразиях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью.-Лит. матем.сб., 1966, вып.6, № 3, с.313-322.

3. Ч а х т а у р и А.И. Об одной конгруэнции, связанной с трехмерной сетью.-Тезисы докл. II Всесоюзной геометрич.конф. Харьков, 1964, с.307-310.

4. Г о ц а ц ю к С.В. (Киреева). Теорема существования сетей $\Sigma_n^g (g < n)$ в пространстве P_n. Корреляции, связанные с сетью Σ_n^{n-1}.-В кн.: Современная геометрия, ЛГПИ им.А.И.Герцена, 1978, с.46-48.

5. Г о ц а ц ю к С.В. (Киреева) Геометрия некоторых классов сетей пониженного индекса в P_3.-В кн.: Геометрия, ЛГПИ им.А.И.Герцена, 1975, № 3, с.15-25.