Точка M прямой $\mathcal{L}$, в которой касательная к линии (M) параллельна прямой (2.21), определяется следующим образом:

$$\bar{M} = \bar{A}_1 + \frac{\ell}{p}\bar{e}_3 \qquad (2.23)$$

Из (2.22),(2.23) вытекает справедливость утверждения.

Теорема доказана.

Литература

1. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Фиников С.П., Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1950.

3. Скрыдлова Е.В., О вырожденных конгруэнциях линейных пар фигур. Материалы IУ Прибалтийской геометрической конференции. Тарту, 1973, 116- 118.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Х л я п о в а Е.А.

О МНОГООБРАЗИЯХ $\{\kappa+1, \kappa, n\}$ В n-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается $\frac{n+1}{2}$ – мерное многообразие пар фигур, порожденных $\frac{n-1}{2}$-плоскостью и квадратичным элементом-многообразие $\{\kappa+1, \kappa, n\}$ при $\kappa = \frac{n-1}{2}$ [1].

По аналогии с односторонним аффинным расслоением пар конгруэнций в A_3 [2] вводится одностороннее аффинное расслоение семейств плоскостей в A_n и рассматриваются аффинные связности, ассоциированные с многообразием $\{\kappa+1, \kappa, n\}$.

§1. Ассоциированные аффинные связности.

Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве A_n многообразие $\{\kappa+1, \kappa, n\}$ т.е. многообразие пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1-центральный квадратичный элемент, а F_2 - κ-плоскость, не инцидентная гиперплоскости квадратичного элемента, причем κ-плоскости F_2 образуют $(\kappa+1)$-параметрическое семейство, а многообразие центральных квадратичных элементов F_1 является многообразием $(\kappa+1, \kappa+1, n)^2$.

Будем предполагать инцидентность касательной плоскости α поверхности центров квадратичного элемента F_1 его гиперплоскости и непараллельность плоскости α линии пересечения κ-плоскости F_2 и гиперплоскости квадратичного элемента F_1.

Индексы, встречающиеся в работе, принимают значения

$$i, j = 1, 2, \ldots, n-1 \ ; \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{\kappa}, \hat{\ell}, \hat{m} = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2} \ ;$$

$$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \frac{n+3}{2}, \ldots, n.$$

Исследование многообразия $\{\kappa+1, \kappa, n\}$ будем проводить в репере $\{A, \bar{e}_i, \bar{e}_a\}$ вершина A которого совмещена с центром квадратичного элемента F_1, векторы $\bar{e}_i$ расположены в его гиперплоскости, вектор $\bar{e}_n$ вне её, причем векторы $\bar{e}_{\hat{a}}$ параллельны κ-плоскости F_2, а векторы $\bar{e}_{\hat{i}}$ помещены в касательную плоскость поверхности (A).

Уравнения центрального квадратичного элемента F_1 и κ-плоскости F_2 принимают соответственно вид:

$$a_{ij} x^i x^j - 1 = 0, \quad x^n = 0, \quad \det(a_{ij}) \neq 0, \tag{1}$$

$$x^{\hat{i}} = c^{\hat{i}}. \tag{2}$$

Система пфаффовых уравнений многообразия $\{\kappa+1, \kappa, n\}$ записывается в виде:

$$\omega^{\hat{a}} = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{i,\hat{i}}^n \omega^{\hat{i}}, \quad \omega_{\hat{a}}^{\hat{i}} = \Lambda_{\hat{a}\hat{j}}^{\hat{i}} \omega^{\hat{j}},$$

$$\omega_{\hat{i}}^{\hat{a}} = \Lambda_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{j}} \qquad (\Lambda_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{a}} = \Lambda_{\hat{j}\hat{i}}^{\hat{a}}), \tag{3}$$

$$\theta^{\hat{i}} = \Lambda_{\hat{j}}^{\hat{i}} \omega^{\hat{j}}, \qquad \theta_{ij} = \Lambda_{ij,\hat{i}} \omega^{\hat{i}},$$

где

$$\theta_{ij} = da_{ij} - a_{\kappa j}\omega_i^{\kappa} - a_{i\kappa}\omega_j^{\kappa},$$

$$\theta^{\hat{i}} = dc^{\hat{i}} + c^{\hat{j}}\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}.$$

Замыкание системы уравнений (3) содержится в [I] и здесь не приводится.

Будем рассматривать $(\kappa+1)$-мерную поверхность (A) как базу. К каждой точке этой поверхности присоединены $(\kappa+1)$-мерная плоскость α, определяемая точкой A и векторами $\bar{e}_{\hat{i}}$ (касательная плоскость поверхности (A)) и κ-мерная плоскость ℓ, определяемая точкой A и векторами $\bar{e}_{\hat{a}}$.

В многообразии $(\kappa+1)$-мерных плоскостей α путем проектирования смежной $(\kappa+1)$-мерной плоскости $\alpha + d\alpha$ на исходную плоскость α параллельно κ-плоскости ℓ определяется аффинная связность с нулевым кручением. Формы кривизны $X_{\hat{i}}^{\hat{j}}$ этой связности имеют вид:

$$X_{\hat{i}}^{\hat{j}} = \mathcal{D}\omega_{\hat{i}}^{\hat{j}} - \omega_{\hat{i}}^{\hat{\kappa}} \wedge \omega_{\hat{\kappa}}^{\hat{j}} = \omega_{\hat{i}}^{\hat{a}} \wedge \omega_{\hat{a}}^{\hat{j}} = \frac{1}{2} B_{\hat{i}\hat{\kappa}\hat{\ell}}^{\hat{j}} \omega^{\hat{\kappa}} \wedge \omega^{\hat{\ell}}, \tag{4}$$

где $B_{\hat{i}\hat{\kappa}\hat{\ell}}^{\hat{j}}$ - тензор кривизны полученной связности B.

Аналогично в многообразии κ-мерных плоскостей ℓ оснащением α индуцируется аффинная связность C с нулевым кручением и формами кривизны $Y_{\hat{a}}^{\hat{b}}$:

$$Y_{\hat{a}}^{\hat{b}} = \mathcal{D}\omega_{\hat{a}}^{\hat{b}} - \omega_{\hat{a}}^{\hat{c}} \wedge \omega_{\hat{c}}^{\hat{b}} = \omega_{\hat{a}}^{\hat{i}} \wedge \omega_{\hat{i}}^{\hat{b}} = \frac{1}{2} C_{\hat{a}\hat{j}\hat{\kappa}}^{\hat{b}} \omega^{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{\kappa}}. \tag{5}$$

§2. Одностороннее аффинное расслоение.

Пусть имеется $(\kappa+1)$-параметрическое семейство (ℓ)

k-мерных плоскостей ℓ и m-параметрическое семейство H_m пучков γ параллельных $(k+1)$-мерных плоскостей $(m = 0, 1, \ldots n)$.

Определение. Будем говорить, что существует одностороннее аффинное расслоение от семейства (ℓ) к семейству H_m, если: 1/задано отображение φ, ставящее в соответствие каждой k-плоскости ℓ семейства (ℓ) единственный пучок $\gamma = \varphi(\ell)$ семейства H_m, причем плоскость ℓ не инцидентна плоскости пучка γ, 2/к семейству (ℓ) плоскостей ℓ можно присоединить k-параметрическое семейство $(k+1)$-мерных поверхностей Σ, так чтобы касательные $(k+1)$-мерные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с плоскостью ℓ семейства (ℓ) содержались в соответствующем пучке семейства H_m.

Пользуясь введенным определением, рассмотрим одностороннее аффинное расслоение от семейства (ℓ) плоскостей ℓ к семейству (α) плоскостей α многообразия $\{k+1, k, n\}$.

Точка, принадлежащая плоскости ℓ, запишется в виде

$$\bar{M} = \bar{A} + x^{\hat{a}} \bar{e}_{\hat{a}} .$$

Имеем

$$d\bar{M} = (\omega^{\hat{i}} + x^{\hat{a}} \omega_{\hat{a}}^{\hat{i}}) \bar{e}_{\hat{i}} + (dx^{\hat{a}} + x^{\hat{\ell}} \omega_{\hat{\ell}}^{\hat{a}}) \bar{e}_{\hat{a}} . \qquad (6)$$

Для того, чтобы эта касательная $(k+1)$-мерная плоскость была параллельна $(k+1)$-мерной плоскости α, необходимо и достаточно, чтобы

$$dx^{\hat{a}} + x^{\hat{b}} \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 0 . \qquad (7)$$

Так как семейство поверхностей (M) k-параметрическое, то система (7), состоящая из k-уравнений, должна быть вполне интегрируемой. Требуя полную интегрируемость системы уравнений (7), получаем условия одностороннего аффинного расслоения семейств (ℓ) и (α) в виде:

$$\omega_{\hat{b}}^{\hat{i}} \wedge \omega_{\hat{i}}^{\hat{a}} = 0 . \qquad (8)$$

Теорема. Семейства (ℓ) и (α) многообразия $\{k+1, k, n\}$ односторонне аффинно расслояемы тогда и только тогда, когда формы кривизны связности C равны нулю.

Справедливость утверждения непосредственно вытекает из (5) и (8).

Литература.

1. Хляпова Е.А., Дифференциальная геометрия многообразий центральных квадратичных пар фигур в A_n. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, 1973, 153-162.

2. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, 1973, 149-152.