УДК 514.75

***Е. Е. Белова*[1], *О. О. Белова*[2]**

[1, 2] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

[1] el_liza_belova@mail.ru, [2] olgaobelova@mail.ru

[1] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0762-074X

[2] ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1300-9587

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-6

Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей с одноиндексными базисно-слоевыми формами

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено пространство центрированных плоскостей. Над ним возникает некоторое главное расслоение. В этом расслоении задается аналог связности Нейфельда. Рассмотрен случай, когда одноиндексные формы являются базисно-слоевыми формами. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует данную связность.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, аналог сильной нормализации Нордена, связность Нейфельда.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I^J, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$ (см., напр., [1]):

Поступила в редакцию 04.02.2019 г.

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \;\; D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$
$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \qquad (2)$$

В пространстве P_n рассмотрим пространство Π [2] центрированных плоскостей L_m^*. Произведем специализацию подвижного репера $\{ A, A_a, A_\alpha \}$ ($a,... = \overline{1, m}$; $\alpha,... = \overline{m+1, n}$), помещая вершину A в центр m-мерной плоскости, а вершины A_a — на центрированную плоскость L_m^*. Из формул (1) следует, что для пространства Π формы ω^a, ω^α, ω_a^α являются базисными, $\dim \;\Pi = n + (n-m)m$.

Базисные формы удовлетворяют вытекающим из (2) структурным уравнениям (ср. [3])

$$D\omega^\alpha = \omega_a^\alpha \wedge \Omega^a + \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha, \; D\omega^a = \omega^b \wedge \Omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a,$$
$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \Omega_{a\beta}^{\alpha b} + \omega^\alpha \wedge \Omega_a, \qquad (3)$$

где

$$\Omega^a = -\omega^a, \, \Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha, \, \Omega_b^a = \omega_b^a, \, \Omega_\alpha^a = \omega_\alpha^a, \, \Omega_a = -\omega_a, \qquad (4)$$

$$\Omega_{\beta a}^{\alpha b} = \delta_a^b \, \Omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \, \Omega_a^b.$$

В данном случае формы ω^a являются базисными, а формы $\Omega^a = -\omega^a$ — слоевыми (ср. [4; 5]).

Находим внешние дифференциалы от форм (4):

$$D\Omega^a = \Omega^b \wedge \Omega_b^a - \omega^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a,$$

$$D\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha + \omega^a \wedge \Omega_{\beta a}^\alpha - \omega_a^\alpha \wedge \Omega_\beta^a,$$

$$D\Omega_b^a = \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_{b\alpha}^a + \omega^c \wedge \Omega_{bc}^a + \omega_b^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a, \qquad (5)$$

$$D\Omega_\alpha^a = -\Omega_\beta^b \wedge \Omega_{b\alpha}^{\beta a} + \omega^a \wedge \Omega_\alpha, \quad D\Omega_a = \Omega_a^b \wedge \Omega_b + \omega_a^\alpha \wedge \Omega_\alpha,$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta},\ \Omega^{\alpha}_{\beta a} = \delta^{\alpha}_{\beta}\Omega_{a},$$

$$\Omega^{a}_{bc} = -\delta^{a}_{b}\omega_{c} - \delta^{a}_{c}\omega_{b},\ \Omega^{a}_{b\alpha} = -\delta^{a}_{b}\omega_{\alpha},\ \Omega_{\alpha} = -\omega_{\alpha}.$$

Над пространством центрированных плоскостей Π возникает главное расслоение $\mathfrak{L}(\Pi)$ со структурными уравнениями (3, 5), типовым слоем которого является группа Ли $\mathfrak{L}$, действующая в касательном пространстве к Π, $\dim \mathfrak{L} = (n-m)n + m(m+2)$. В главном расслоении $\mathfrak{L}(\Pi)$ с многомерным приклеиванием [6] зададим аналог связности Нейфельда [7—9] способом Лаптева — Лумисте.

Введем новые формы:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}^{a} &= \Omega^{a} - \bar{\Gamma}^{a}_{\alpha}\omega^{\alpha} - \bar{\Gamma}^{a}_{b}\omega^{b} - \bar{L}^{ab}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{b},\\
\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} &= \Omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega^{a} - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a},\\
\tilde{\Omega}^{a}_{b} &= \Omega^{a}_{b} - \Gamma^{a}_{b\alpha}\omega^{\alpha} - \Gamma^{a}_{bc}\omega^{c} - L^{ac}_{b\alpha}\omega^{\alpha}_{c},\\
\tilde{\Omega}^{a}_{\alpha} &= \Omega^{a}_{\alpha} - \Gamma^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta} - \Gamma^{a}_{\alpha b}\omega^{b} - L^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},\\
\tilde{\Omega}_{a} &= \Omega_{a} - L_{a\alpha}\omega^{\alpha} - L_{ab}\omega^{b} - \Pi^{b}_{a\alpha}\omega^{\alpha}_{b}.
\end{aligned}\tag{6}$$

Находя дифференциалы форм (6), получаем, что связность в главном расслоении $\mathfrak{L}(\Pi)$ задается с помощью поля объекта связности Γ={ $\bar{\Gamma}^{a}_{\alpha}$, $\bar{\Gamma}^{a}_{b}$, $\bar{L}^{ab}_{\alpha}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta a}$, $L^{\alpha a}_{\beta\gamma}$, $\Gamma^{a}_{b\alpha}$, Γ^{a}_{bc}, $L^{ac}_{b\alpha}$, $\Gamma^{a}_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{a}_{\alpha b}$, $L^{ab}_{\alpha\beta}$, $L_{a\alpha}$, L_{ab}, $\Pi^{b}_{a\alpha}$} на базе Π уравнениями

$$\Delta\bar{\Gamma}^{a}_{\alpha} - \bar{\Gamma}^{a}_{b}\Omega^{b}_{\alpha} - \bar{L}^{ab}_{\alpha}\Omega_{b} - \Omega^{a}_{\beta} = \bar{\Gamma}^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta} + \bar{\Gamma}^{a}_{\alpha b}\omega^{b} + \bar{\Gamma}^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},$$

$$\Delta\bar{\Gamma}^{a}_{b} = \bar{\Gamma}^{a}_{b\alpha}\omega^{\alpha} + \bar{\Gamma}^{a}_{bc}\omega^{c} + \bar{\Gamma}^{ac}_{b\alpha}\omega^{\alpha}_{c},$$

$$\Delta\bar{L}^{ab}_{\alpha} = \bar{L}^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta} + \bar{L}^{ab}_{\alpha c}\omega^{c} + \bar{L}^{abc}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{c},$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\Omega^{a}_{\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\Omega_{a} + \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma a}\omega^{a} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{a},$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta a}+\delta^{\alpha}_{\beta}\Omega_a=\Gamma^{\alpha}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b}+\Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{b},$$

$$\Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}\Omega^{a}_{\beta}=L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}+L^{\alpha a}_{\beta\gamma b}\omega^{b}+L^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{b},$$

$$\Delta\Gamma^{a}_{b\alpha}-\Gamma^{a}_{bc}\Omega^{c}_{\alpha}-L^{ac}_{b\alpha}\Omega_c+\delta^{a}_{b}\Omega_{\alpha}=\Gamma^{a}_{b\alpha\beta}\omega^{\beta}+\Gamma^{a}_{b\alpha c}\omega^{c}+\Gamma^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^{\beta}_{c},$$

$$\Delta\Gamma^{a}_{bc}+\delta^{a}_{b}\Omega_c+\delta^{a}_{c}\Omega_b=\Gamma^{a}_{bc\alpha}\omega^{\alpha}+\Gamma^{a}_{bce}\omega^{e}+\Gamma^{ae}_{bc\alpha}\omega^{\alpha}_{e},$$

$$\Delta L^{ac}_{b\alpha}+\delta^{c}_{b}\Omega^{a}_{\alpha}=L^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^{\beta}+L^{ac}_{b\alpha e}\omega^{e}+L^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^{\beta}_{e}, \tag{7}$$

$$\Delta\Gamma^{a}_{\alpha\beta}-\Gamma^{a}_{\alpha b}\Omega^{b}_{\beta}-L^{ab}_{\alpha\beta}\Omega_b-\Gamma^{a}_{b\beta}\Omega^{b}_{\alpha}+\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Omega^{a}_{\gamma}=\Gamma^{a}_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}+\Gamma^{a}_{\alpha\beta b}\omega^{b}+\Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{b},$$

$$\Delta\Gamma^{a}_{\alpha b}-\Gamma^{a}_{cb}\Omega^{c}_{\alpha}+\Gamma^{\beta}_{\alpha b}\Omega^{a}_{\beta}+\delta^{a}_{b}\Omega_{\alpha}=\Gamma^{a}_{\alpha b\beta}\omega^{\beta}+\Gamma^{a}_{\alpha bc}\omega^{c}+\Gamma^{ac}_{\alpha b\beta}\omega^{\beta}_{c},$$

$$\Delta L^{ab}_{\alpha\beta}+L^{\gamma b}_{\alpha\beta}\Omega^{a}_{\gamma}-L^{ab}_{c\beta}\Omega^{c}_{\alpha}=L^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}+L^{ab}_{\alpha\beta c}\omega^{c}+L^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{c},$$

$$\Delta L_{a\alpha}-L_{ab}\Omega^{b}_{\alpha}+(\Gamma^{b}_{a\alpha}-\Pi^{b}_{a\alpha})\Omega_b=L_{a\alpha\beta}\omega^{\beta}+L_{a\alpha b}\omega^{b}+L^{b}_{a\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},$$

$$\Delta L_{ab}+\Gamma^{c}_{ab}\Omega_c=L_{ab\alpha}\omega^{\alpha}+L_{abc}\omega^{c}+L^{c}_{ab\alpha}\omega^{\alpha}_{c},$$

$$\Delta\Pi^{b}_{a\alpha}+L^{cb}_{a\alpha}\Omega_c+\delta^{b}_{a}\Omega_{\alpha}=\Pi^{b}_{a\alpha\beta}\omega^{\beta}+\Pi^{b}_{a\alpha c}\omega^{c}+\Pi^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^{\beta}_{c}.$$

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [10] данного многообразия полями следующих геометрических образов: $(n-m-1)$-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^{*}_{m}, и $(m-1)$-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^{*}_{m} и не проходящей через ее центр. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_{\alpha}=A_{\alpha}+\lambda^{a}_{\alpha}A_a+\lambda_{\alpha}A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a=A_a+\lambda_a A$. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность этих плоскостей, получим

$$\Delta\lambda^{a}_{\alpha}+\Omega^{a}_{\alpha}\equiv 0,\ \Delta\lambda_{\alpha}-\lambda^{a}_{\alpha}\Omega_a-\omega_{\alpha}\equiv 0,\ \Delta\lambda_a-\Omega_a\equiv 0, \tag{8}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^{a}, ω^{α}, ω^{α}_{a}.

Аналог сильной нормализации Нордена, задаваемой полем квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ на многообразии Π, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ:

$$\overline{\Gamma}^a_\alpha = -\lambda^a_\alpha\,,\ \overline{\Gamma}^a_b = 0\,,\ \overline{L}^{ab}_\alpha = 0\,,$$

$$L^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma \lambda^a_\beta\,,\ \Gamma^\alpha_{\beta a} = -\delta^\alpha_\beta \lambda_a\,,\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma \lambda_\beta - \delta^\alpha_\beta \eta_\gamma\,,$$

$$L^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b \lambda^a_\alpha\,,\ \Gamma^a_{bc} = -\delta^a_b \lambda_c - \delta^a_c \lambda_b\,,\ \Gamma^a_{b\alpha} = -\delta^a_b \eta_\alpha + \lambda^a_\alpha \lambda_b\,,$$

$$L^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^b_\alpha \lambda^a_\beta\,,\ \Gamma^a_{\alpha b} = -\delta^a_b \eta_\alpha\,,\ \Gamma^a_{\alpha\beta} = -\lambda_b \lambda^b_\alpha \lambda^a_\beta\,, \tag{9}$$

$$\Pi^b_{a\alpha} = -\delta^b_a \lambda_\alpha\,,\ L_{ab} = \lambda_a \lambda_b\,,\ L_{a\alpha} = -\lambda_a \lambda_b \lambda^b_\alpha\,,$$

где $\eta_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda^a_\alpha \lambda_a$. Функции (9) в силу сравнений (8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (7). Таким образом, справедлива

Теорема. *Аналог сильной нормализации пространства центрированных плоскостей индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении $\mathfrak{L}(\Pi)$.*

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

2. *Belova O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes // Journal of Mathematical Sciences. 2009. Vol. 162, № 5. P. 605—632.

3. *Белова О.О.* Индуцирование аналога связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 24—28.

4. *Белова О.О.* Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей с двухиндексными базисно-слоевыми формами // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 29—35.

5. *Belova O.* An analog of Neifeld's connection induced on the space of centred planes // Miskolc Math. Notes. 2018. Vol. 19, № 2. P. 749—754.

6. *Шевченко Ю.И.* Об обобщениях проективной связности Картана на гладком многообразии // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физ.-мат. и техн. науки. 2014. Вып. 10. С. 60—68.

7. *Нейфельд Э.Г.* Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Изв. вузов. Матем. 1976. № 11. С. 48—55.

8. *Норден А.П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 1981. № 11. С. 80—83.

9. *Малахальцев М.А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Изв. вузов. Матем. 1986. № 2. С. 67—69.

10. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

E. Belova[1], *O. Belova*[2]
[1, 2] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] el_liza_belova@mail.ru, [2] olgaobelova@mail.ru
[1] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0762-074X
[2] ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1300-9587
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-6

About an analogue of Neifeld's connection on the space of centred planes with one-index basic-fibre forms

Submitted on February 4, 2019

This research is realized by Cartan — Laptev method (with prolongations and scopes, moving frame and exterior forms). In this paper we consider a space Π of centered m-planes (a space of all centered planes of the dimension m). This space is considered in the projective space P_n . For the space Π we have: dim $\Pi = n + (n - m)m$. Principal fiber bundle is arised above it. The Lie group is a typical fiber of the principal fiber. This group acts in the tangent space to the Π. Analogue of Neifeld's connection with multivariate glueing is given in this fibering by Laptev — Lumiste way. The case when one-index forms are basic-fibre forms is considered. We realize an analogue of the Norden strong normalization of the space Π by fields of the geometrical images: $(n - m - 1)$-plane which is

not having the common points with a centered *m*-plane and *(m – 1)*-plane which is belonging to the *m*-plane and not passing through its centre. It is proved that the analog of the Norden strong normalization of the space of centered planes induces this connection.

Keywords: projective space, space of centred planes, analogue of Norden strong normalization, Neifeld's connection.

References

1. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothings of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000) (in Russian).
2. *Belova, O.:* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes. J. Math. Sci. Springer New York. **162**:5, 605—632 (2009).
3. *Belova, O. O.:* Inducing an analog of Neifeld's connection on the space of centred planes. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 47, 24—28 (2016) (in Russian).
4. *Belova, O. O.:* About an analogue of Neifeld's connection on the space of centred planes with two-index basic-fibre forms. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 49, 29—35 (2018) (in Russian).
5. *Belova, O.:* An analog of Neifeld's connection induced on the space of centred planes. Miskolc Math. Notes. **19**:2, 749—754 (2018).
6. *Shevchenko, Yu. I.:* About generalizations of Cartan projective connection on a smooth manifold. IKBFU's Vestnik: Physics, Mathematics, and Technology. 10, 60—68 (2014) (in Russian).
7. *Neifeld, E. G.:* Affine connections on the normalized manifolds of planes of the projective space. News of High Schools. Math. 11, 48—55 (1976) (in Russian).
8. *Norden, A. P.:* Projective metrics on Grassmann manifolds. News of High Schools. Math. 11, 80—83 (1981) (in Russian).
9. *Malakhaltsev, M. A.:* About the internal geometry of Neifeld's connection. News of High Schools. Math. 2, 67—69 (1986) (in Russian).
10. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Nauka, Moscow (1976) (in Russian).