В построенном репере конгруэнция Ψ_{n-1} определяется системой пфаффовых уравнений (7) и уравнениями

$$\omega_1^n = -\omega^n, \quad \omega_1^1 = \Lambda_{1a}^1 \omega^a. \tag{14}$$

Уравнения поляры β_{n-2} точки E_1 относительно квадратичного элемента $\mathcal{F}$ имеют вид:

$$a_{1i} x^i - 1 = 0, \quad x^n = 0. \tag{15}$$

Обозначим буквой Q_1 квадрику

$$a_{\hat a \hat b} x^{\hat a} x^{\hat b} - 1 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^n = 0, \tag{16}$$

полученную при пересечении квадратичного элемента $\mathcal{F}$ плоскостью α_{n-2}.

Сечение γ_{n-3} поляры β_{n-2} плоскостью α_{n-2} определяется уравнениями

$$a_{1\hat a} x^{\hat a} - 1 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^n = 0. \tag{17}$$

Полюс M плоскости γ_{n-3} относительно квадрики Q_1 задается формулой

$$\bar M = \bar A - a^{\hat a \hat b}\, a_{1\hat b}\, \bar e_{\hat a}. \tag{18}$$

Таким образом, построена инвариантная точка M гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. "Труды геом.семинара". М., ВИНИТИ, 1969, 2, 179-206.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

СВЯЗНОСТИ В ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В проективном пространстве P_N рассмотрим тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$ как τ-мерное многообразие ($\tau = n-m$) пар плоскостей (L_m, T_n), обладающее тем свойством, что плоскость L_m вместе со своей первой дифференциальной окрестностью принадлежит плоскости T_n. С тангенциально вырожденной поверхностью $S_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение, базой которого является τ-мерное многообразие плоских образующих L_m, а слоем-группа, действующая на паре плоскостей (L_m, T_n). Показано, что для задания связности в ассоциированном расслоении достаточно произвести обобщенную нормализацию тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$, т.е. к каждой образующей L_m присоединить: 1/нормаль 1-го рода - $(N-\tau)$-мерную плоскость $P_{N-\tau}$, пересекающую касательную плоскость T_n по образующей L_m; 2/нормаль 2-го рода - $(\tau-1)$-мерную плоскость $P_{\tau-1}$, принадлежащую касательной плоскости T_n и не имеющую общих точек с образующей L_m. Аналогичным образом рассмотрена нормально центрированная тангенциально вырожденная поверхность.

Отнесем N-мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA_{\mathcal{J}'} = \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'} A_{\mathcal{K}'} \quad (\mathcal{I}', \mathcal{J}', \mathcal{K}' = 0, 1, \ldots, N), \qquad (1)$$

причем линейные формы $\theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'} = \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{J}'} \wedge \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}.$$

В качестве инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$ будем рассматривать формы

$$\omega^{\mathcal{I}} = \theta_{0}^{\mathcal{I}}, \quad \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} = \theta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} - \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} \theta_{0}^{0},$$

$$\omega_{\mathcal{I}} = \theta_{\mathcal{I}}^{0} \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{1, N}),$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям [I-3]

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}},$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} + (\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} \omega_{\mathcal{J}} + \delta_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} \omega_{\mathcal{K}}) \wedge \omega^{\mathcal{J}},$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}.$$

Формулы (I) теперь можно записать в виде

$$dA_0 = \theta_0^0 A_0 + \omega^{\mathcal{I}} A_{\mathcal{I}},$$

$$dA_{\mathcal{I}} = \theta_0^0 A_{\mathcal{I}} + \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}} + \omega_{\mathcal{I}} A_0.$$

В проективном пространстве P_N рассмотрим тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$ [4], которая представляет собой такой частный случай линейчатой поверхности X_{m+r} $(r = n-m)$ с m-мерными плоскими образующими L_m, когда касательная плоскость T_n постоянна вдоль образующей L_m.

Произведем специализацию подвижного репера $R_0 = \{A_0, A_a, A_i, A_\alpha\}$, где индексы принимают значения:

$$a, b, c = 1, \ldots, m; \quad i, j, k = m+1, \ldots, n;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = n+1, \ldots, N \quad (1 \le m < n < N).$$

Вершины $A_0, A_1, \ldots, A_m$ репера R_0 поместим на плоскую образующую L_m, вершины A_i – на касательную плоскость T_n, содержащую плоскую образующую L_m.

Система дифференциальных уравнений тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$ в репере R_0 имеет вид:

$$\omega^{\alpha} = 0, \quad \omega_a^{\alpha} = 0, \qquad (2)$$

$$\omega_a^i = \Lambda_{aj}^i \omega^j, \quad \omega_i^{\alpha} = \Lambda_{ij}^{\alpha} \omega^j. \qquad (3)$$

Замыкая систему уравнений (2), получим тождества

$$\Lambda_{ij}^{\alpha} = \Lambda_{ji}^{\alpha}, \quad \Lambda_{ai}^{k} \Lambda_{kj}^{\alpha} = \Lambda_{aj}^{k} \Lambda_{ki}^{\alpha}.$$

Продолжая систему уравнений (3), получим

$$\overline{\nabla} \Lambda_{a(j)}^i - \delta_j^i \omega_a \equiv 0, \quad \overline{\nabla} \Lambda_{i(j)}^{\alpha} \equiv 0,$$

причем символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i, а дифференциальный оператор $\overline{\nabla}$ действует следующим образом:

$$\overline{\nabla} \Lambda_{i(j)}^{\alpha} = d\Lambda_{ij}^{\alpha} - \Lambda_{ik}^{\alpha} \overline{\omega}_j^k - \Lambda_{kj}^{\alpha} \omega_i^k + \Lambda_{ij}^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha},$$

где

$$\overline{\omega}_j^k = \omega_j^k - \Lambda_{aj}^k \omega^a. \qquad (4)$$

Совокупность функций $\Lambda = (\Lambda_{aj}^i, \Lambda_{ij}^{\alpha})$ будем называть фундаментальным объектом первого порядка тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$, рассматриваемой как специальное r-мерное многообразие пар плоскостей (L_m, T_n), а репер R_0 – репером нулевого порядка.

С тангенциально вырожденной поверхностью $S_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение $G(B_r)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^i, \qquad (5)$$

$$\mathcal{D}\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^i \wedge \omega_i^a, \qquad (6)$$

$$\mathcal{D}\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b) \wedge \omega^c + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a, \qquad (7)$$

$$\mathcal{D}\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega^i \wedge \omega_{ai}, \qquad (8)$$

$$\mathcal{D}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_a \wedge \omega^a + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i,$$

$$\mathcal{D}\omega_i = \omega_i^a \wedge \omega_a + \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$

$$\mathcal{D}\omega_i^a = \omega_i^b \wedge \omega_b^a + \omega_i^j \wedge \omega_j^a + \omega_i \wedge \omega^a + \omega^j \wedge \omega_{ij}^a,$$

где

$$\begin{aligned} &\omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^j \omega_j^a - \delta_b^a \omega_i, \quad \omega_{ai} = \Lambda_{ai}^j \omega_j, \\ &\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^\alpha \omega_\alpha^i - \Lambda_{ak}^i \omega_j^a - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j, \\ &\omega_{ij} = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha, \quad \omega_{ij}^a = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^a. \end{aligned} \tag{9}$$

Базой главного расслоения $G(B_r)$ является r-мерное многообразие B_r плоских образующих L_m, а слоем-группа $G \subset GP(N,R)$, действующая на паре плоскостей (L_m, T_n). Расслоение $G(B_r)$ содержит расслоение проективных реперов [2-3] со структурными уравнениями (5)-(8), слоем которого является проективная группа $GP(m,R) \subset G$, действующая на плоской образующей L_m.

Связность в главном расслоении $G(B_r)$ зададим с помощью поля объекта связности [5]

$$\Gamma = (\Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ij}^a)$$

на базе B_r:

$$\begin{aligned} &\bar\nabla \Gamma_{(i)}^a - \Gamma_{bi}^a \omega^b + \omega_i^a \equiv 0, \\ &\bar\nabla \Gamma_{b(i)}^a + \delta_b^a (\Gamma_{ci}\omega^c - \Gamma_i^c \omega_c) + \Gamma_{bi}\omega^a - \Gamma_i^a \omega_b + \omega_{bi}^a \equiv 0, \\ &\bar\nabla \Gamma_{a(i)} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} \equiv 0, \\ &\bar\nabla \Gamma_{j(k)}^i + \delta_j^i (\Gamma_{ak}\omega^a - \Gamma_k^a \omega_a) + \omega_{jk}^i \equiv 0, \\ &\bar\nabla \Gamma_{i(j)} + \Gamma_{ij}^a \omega_a + \Gamma_{ij}^k \omega_k - \Gamma_{aj}\omega_i^a + \omega_{ij} \equiv 0, \\ &\bar\nabla \Gamma_{i(j)}^a - \Gamma_{bj}^a \omega_i^b + \Gamma_{ij}^k \omega_k^a + \Gamma_{ij}\omega^a - \Gamma_j^a \omega_i + \omega_{ij}^a \equiv 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Т е о р е м а. Обобщенная нормализация тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G(B_r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль 1-го рода P_{N-r} зададим системой уравнений

$$x^i - \lambda_\alpha^i x^\alpha = 0,$$

где

$$\nabla \lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega^j,$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом:

$$\nabla \lambda_\alpha^i = d\lambda_\alpha^i - \lambda_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^j \omega_j^i.$$

Нормаль 2-го рода P_{r-1} зададим системой точек

$$B_i = A_i + \lambda_i^a A_a + \lambda_i A_0.$$

Из условий инвариантности плоскости P_{r-1} найдем

$$\begin{aligned} &\nabla \lambda_i^a + \lambda_i \omega^a + \omega_i^a = \lambda_{ij}^a \omega^j, \\ &\nabla \lambda_i + \lambda_i^a \omega_a + \omega_i = \lambda_{ij} \omega^j. \end{aligned} \tag{11}$$

Продолжая систему уравнений (II), получим

$$\bar\nabla \lambda_{i(j)}^a - \lambda_k^a \omega_{ij}^k + \lambda_i^b \omega_{bj}^a + \lambda_{ij}\omega^a + \lambda_i \omega_j^a + \omega_{ij}^a \equiv 0,$$

$$\bar\nabla \lambda_{i(j)} - \lambda_k \omega_{ij}^k + \lambda_{ij}^a \omega_a + \lambda_i^a \omega_{aj} + \omega_{ij} \equiv 0.$$

Обобщенная нормализация тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$ задается полем квазитензора $\lambda = (\lambda_\alpha^i, \lambda_i^a, \lambda_i)$ на базе B_r. Фундаментальный объект первого порядка Λ и частично продолженный нормализующий объект

$$\lambda' = (\lambda, \lambda_{ij}^a, \lambda_{ij})$$

позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma_i^a = \lambda_i^a, \quad \Gamma_{bi}^a = \Lambda_{bi}^j \lambda_j^a - \delta_b^a \lambda_i, \quad \Gamma_{ai} = \Lambda_{ai}^j \lambda_j,$$

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha - \Lambda^i_{ak}\lambda^a_j - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j ,$$

$$\Gamma_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k\Gamma^k_{ij} - \lambda^a_i\Gamma_{aj} ,$$

$$\Gamma^a_{ij} = \lambda^a_{ij} + \lambda^a_k\Gamma^k_{ij} - \lambda^b_i\Gamma^a_{bj} - \lambda_i\lambda^a_j .$$

З а м е ч а н и е. I. Известно, что тангенциально вырожденная поверхность является частным случаем поверхности, рассматриваемой как многообразие точек. С другой стороны, поверхность, рассматриваемая как многообразие центрированных плоскостей [6], является частным случаем тангенциально вырожденной поверхности, представляемой нами как специальное многообразие пар плоскостей. В последнем частном случае обобщенная нормализация совпадает с нормализацией А.П.Нордена [7].

З а м е ч а н и е 2. Л.С.Атанасян и Н.С.Воронцова [8-9] ввели обобщенное оснащение тангенциально вырожденной гиперповерхности, рассматриваемой как многообразие точек. В связи с другой точкой зрения, на тангенциально вырожденную гиперповерхность понятия обобщенного оснащения и обобщенной нормализации не совпадают.

З а м е ч а н и е 3. С учетом обозначений (4), (9) из системы уравнений (I0) следует, что объект связности Γ не является геометрическим объектом (относительно подгруппы стационарности пары плоскостей (L_m, T_n), но вместе с фундаментальным объектом первого порядка Λ образует геометрический объект. Объекты связности такого рода использовались главным образом в работах Ю.Г.Лумисте [2-3], однако указанная особенность не отмечалась.

Рассмотрим нормально центрированную [I0] тангенциально вырожденную поверхность $S^*_{n,m}$, т.е. тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$, на каждой плоской образующей которой задана точка, причем: а/ центр C описывает r-мерную поверхность X_r; б/ касательная плоскость T_r к поверхности X_r и центрированная образующая L^*_m пересекаются в центре C.

С поверхностью $S^*_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение $G^*(X_r)$, базой которого является поверхность X_r, а слоем-группа $G^* \subset G$, действующая на паре плоскостей (L^*_m, T_n). Справедливы следующие результаты.

Т е о р е м а. Для задания связности в главном расслоении $G^*(X_r)$ достаточно произвести обобщенную нормализацию поверхности $S^*_{n,m}$, т.е. к каждой точке базисной поверхности X_r присоединить: I/ нормаль первого рода - $(N-n)$-мерную плоскость P_{N-n}, пересекающую касательную плоскость T_n в центре C; 2/ нормаль второго рода - $(r-1)$-мерную плоскость P_{r-1}, принадлежащую касательной подплоскости T_r и не проходящую через центр C.

П р е д л о ж е н и е I. Задание поля нормалей первого рода P_{N-n} эквивалентно заданию полей двух плоскостей: а/ $(N-m)$-мерной плоскости P_{N-m}, пересекающей касательную плоскость T_n по подплоскости T_r; б/ $(N-r)$-мерной плоскости P_{N-r}, пересекающей касательную плоскость T_n по образующей L^*_m, в/ плоскости P_{N-m}, P_{N-r} пересекаются по нормали первого рода P_{N-n}.

П р е д л о ж е н и е 2. Задание поля нормалей второго рода P_{r-1} эквивалентно присоединению к каждой точке базисной поверхности X_r $(n-1)$-мерной плоскости P_{n-1}, принадлежащей касательной плоскости T_n, не проходящей через центр C и пересекающей образующую L^*_m по некоторой внутренним образом определенной $(m-1)$-мерной плоскости L_{m-1}.

Из предложений I,2 следует, что обобщенную нормализацию нормально центрированной тангенциально вырожденной поверхности $S^*_{n,m}$ можно представить в 4-х эквивалентных видах.

Список литературы

I. Л а п т е в Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр.Моск.матем.об-ва", т.2, I953, 275-382.

2. Л у м и с т е Ю.Г., Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. "Уч.зап.Тартуск.у-та", вып.I77, I965, 6-4I.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических

расслоениях многообразий плоскостей. Матем. сб., 1973, т. 91, №2, 211-233.

4. А к и в и с М.А., Р ы ж к о в В.В. Многомерные поверхности специальных проективных типов." Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда", 1961, т. 2, Л., "Наука", 1964, 159-164.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства." Тр. 4-го Всес. матем. съезда", 1961, т. 2, "Наука", 1964, 226-233.

6. К а р а п е т я н С.Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей и её интерпретации.- Лит. матем. сб., 1963, т. 3, №2, 222-223.

7. Н о р д е н А.П., Пространства аффинной связности. М.-Л. ГИТТЛ, 1950

8. А т а н а с я н Л.С., В о р о н ц о в а Н.С., Специальные нормализации вырожденных гиперповерхностей $(n+1)$-мерного проективного пространства." Волжский матем. сб., вып. 1, Куйбышев, 1963, 5-9.

9. А т а н а с я н Л.С., В о р о н ц о в а Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства." Вопросы дифф. геом. М., 1965, 5-28.

10. В а г н е р В.В., Теория поля локальных гиперполос." Тр. Семин. по вектор. и тензорн. анализу", 1950, вып. 8, 197-272.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете.

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 28 мая 1975 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 15 октября 1975 года по 26 мая 1976 года.

15.10.1975г. М а х о р к и н В.В. Представление фундаментальной группы однородного пространства в его касательном расслоении.

22.10.1975г. Ю.И. П о п о в. Аффинные связности вырожденной распадающейся гиперполосы.

29.10.1975г. Б.А. А н д р е е в. Дифференцируемые соответствия между пространством нуль-пар и точечным пространством.

5.11.1975г. В.М. О в ч и н н и к о в. Об одном классе дифференцируемых отображений пространств с различными образующими элементами.

12.11.1975г. Т.П. Ф у н т и к о в а. Вырожденные конгруэнции линейных пар фигур.

19.11.1975г. М.В. Б р а з е в и ч (г. Омск). Об одной задаче нормализации многообразия Грассмана.

26.11.1975г. Е.В. С к р ы д л о в а. О вырожденных конгруэнциях пар коник.

3.12.1975г. Ю.И. Ш е в ч е н к о. Обобщенные нормализации полосы и тангенциально вырожденной поверхности в проективном пространстве.

10.12.1975г. В.Б. К и м. (г. Комсомольск-на-Амуре) О многообразии кубик в проективном пространстве.