ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

С.В.Сангаджиева

КОНГРУЭНЦИИ K_p^q

В трехмерном проективном пространстве исследуются конгруэнции K_p^q, $p+q=2$ -конгруэнции линейчатых невырожденных квадрик с p, вырождающимися в точки и с q, вырождающимися в линии фокальными поверхностями. Рассмотрены подклассы таких конгруэнций.

Отнесем конгруэнцию K квадрик Q к реперу $R=\{A_\alpha\}$, $\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3$, где A_i $(i,j,k=1,2)$ -фокальные точки квадрики Q, не принадлежащие одной прямолинейной образующей квадрики Q, а A_0A_i, A_3A_i - ее прямолинейные образующие. Для конгруэнции K_2^0 фокальные поверхности (A_i) вырождаются в точки. Пфаффова система уравнений конгруэнции K_2^0 запишется в виде:

$$\omega_i^0=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_i^3=0,\ \omega_0^3=a_k\omega^k;\ \omega_3^0=b_k\omega^k,\ \begin{matrix}\omega_3^i=c_k^i\omega^k,\\ \Omega=h_k\omega^k,\end{matrix} \tag{1}$$

где ω_α^β -компоненты деривационных формул репера R,

$$\omega_0^i \overset{def}{=\!=} \omega^i,\quad \Omega=\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3, \tag{2}$$

$i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Квадрика $Q\in K_2^0$ и ассоциированные квадрики Q_i [1] определяются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^0x^3=0, \tag{3}$$

$$\mathcal{F}_i\equiv a_i(x^0)^2+b_i(x^3)^2-x^0x^j+h_ix^1x^2-c_i^ix^jx^3-c_i^jx^ix^3=0. \tag{4}$$

Конгруэнции K_2^0 существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Из анализа системы уравнений (1),(3),(4) следует, что конгруэнции K_2^0 обладают следующими свойствами: 1/фокальные точки A_i

являются дву/кратными фокальными точками квадрики $Q\in K_2^0$.

2/ прямолинейные конгруэнции (A_0A_3) и (A_1A_2) образуют двусторонне расслояемую пару.

Для конгруэнции K_0^2 фокальные поверхности (A_i) вырождаются в линии. Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции K_0^2 имеет вид:

$$\left.\begin{matrix}\omega_i^j=0,\ \omega_0^3=a_k\omega^k,\ \omega_3^0=b_k\omega^k,\ \omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\omega^k,\ \Omega=h_k\omega^k,\\ \omega_i^0-\omega_3^j=m_{ik}\omega^k,\ \omega_i^0=\alpha_i\omega_i^3,\ c_{ii}(\alpha_i-m_{ij})+(c_{ij}+1)m_{ii}=0.\end{matrix}\right\} \tag{5}$$

Квадрика $Q\in K_0^2$ и ассоциированные квадрики Q_i определяются соответственно уравнением (3) и уравнениями:

$$\mathcal{F}_i\equiv a_i(x^0)^2+b_i(x^3)^2+c_{ki}x^kx^0+h_ix^1x^2+m_{ki}x^kx^3=0. \tag{6}$$

Пусть $\alpha_i=1$. Тогда касательные к линиям (A_i) пересекаются в одной точке $E_{03}=A_0+A_3$. Для конгруэнции K_0^2 точка A_i является одним из фокусов луча (A_0A_i) (A_3A_i) прямолинейной конгруэнции $(A_0A_i)((A_3A_i))$.

Конгруэнция K_1^1 -конгруэнция K квадрик Q, для которой фокальная поверхность (A_1) вырождается в точку, (A_2) -в линию, определяется следующей системой пфаффовых и конечных уравнений: $\omega_2^0=\alpha\omega_2^3$,

$$\begin{matrix}\omega_i^j=0,\ \omega_1^0=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_0^3=a_k\omega^k,\ \omega_3^0=b_k\omega^k,\ \omega_2^3-\omega^1=c_{2k}\omega^k,\\ \Omega=h_k\omega^k,\ \omega_3^2=m_{1k}\omega^k,\ \omega_2^0-\omega_3^1=m_{2k}\omega^k,\ c_{22}(\alpha-m_{21})+(c_{21}+1)m_{22}=0.\end{matrix} \tag{7}$$

Уравнения ассоциированных квадрик $Q_i\in K_1^1$ имеют вид:

$$\begin{matrix}\mathcal{F}_1\equiv a_1(x^0)^2+b_1(x^3)^2+c_{21}x^0x^2+h_1x^1x^2-m_{11}x^1x^3+m_{21}x^2x^3=0,\\ \mathcal{F}_2\equiv a_2(x^0)^2+b_2(x^3)^2-x^0x^1+c_{22}x^0x^2+h_2x^1x^2-m_{12}x^1x^3+m_{22}x^2x^3=0.\end{matrix} \tag{8}$$

Точка A_2 является одним из фокусов луча A_0A_2 (A_3A_2) прямолинейной конгруэнции $(A_0A_2)((A_3A_2))$, ассоциированной с конгруэнцией K_1^1.

Теорема 1. Если A_0 является фокальной точкой квадрики $Q\in K_p^q$ $(p+q=2)$, то конгруэнции K_p^q обладают следующими геометрическими свойствами: 1/точка A_0 является дву/кратной фокальной точкой квадрики $Q\in K_p^q$.

2/Для конгруэнции K_2^0 ; а/ фокальные точки A_i являются трехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_2^0$; б/прямолинейные конгруэнции $(A_0 A_i)$ и $(A_j A_3)$ двусторонне расслояемы.
3/Для конгруэнции K_0^2 ,являющейся конгруэнцией квадрик Ли своей фокальной поверхности (A_0): а/квадрика Q_i распадается на пару плоскостей с осью $A_0 A_j$,являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0) ;б/точка A_i является двухкратной фокальной точкой квадрики $Q_i \in K_0^2$; в/фокальные линии (A_i) являются прямыми , проходящими через точку $A_0 + A_3$;г/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A_0 A_3)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$.
4/Для конгруэнции K_1^1 :1/точка A_1 является двухкратной фокальной точкой квадрики $Q \in K_1^1$; 2/фокальная поверхность (A_0)-торс; 3/если A_3 -фокальная точка квадрики $Q \in K_1^1$,то (A_2) -сдвоенная фокальная линия.

Т е о р е м а 2.Если ассоциированная квадрика Q_i является конусом с вершиной в точке A_i ,то конгруэнции K_p^q характеризуются следующими свойствами: 1/торсы прямолинейной конгруэнции $(A_0 A_3)$ соответотвуют координатной сети $\omega^1 \omega^2 = 0$; 2/для конгруэнции K_2^0 точки A_i являются трехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_2^0$; 3/для конгруэнции K_0^2: а/точки A_i являются четырехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_0^2$; б/конгруэнции $(A_0 A_i)$ и $(A_3 A_i)$ -параболические со сдвоенным фокусом A_i; в/фокальные линии (A_1) и (A_2) -плоские; 4/для конгруэнции K_1^1 : а/фокальная линия (A_2) -сдвоенная, плоская; б/конгруэнции $(A_0 A_2)$ и $(A_3 A_2)$-параболические со сдвоенным фокусом A_2.

Список литературы

1.Малаховский В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.8.Калининград,1977,с.32-38.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Г.Л.С в е ш н и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции G кривых второго порядка C [1],причем каждая из двух невырождающихся фокальных поверхностей является сдвоенной.

Отнесем конгруэнцию G к реперу $R = \{A_\alpha\}, \alpha, \beta, ... = \overline{1,4}$. Вершины A_1 и A_2 репера R совмещаются с фокальными точками коники C, описывающими сдвоенные невырождающиеся поверхности,вершина A_3 является полюсом прямой $A_1 A_2$ относительно коники.Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), $i, j, k = 1, 2$ в точках A_i , B_i -точка пересечения прямой ℓ с касательной к линии $\omega_j^4 = 0$ на поверхности (A_i) .Вершину A_4 выбираем на линии ℓ так, чтобы она гармонически делила вместе с точкой A_3 точки B_i .

Уравнения коники C относительно данного репера при соответствующей нормировке вершин репера записываются в виде:

$$(x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0 .$$

Конгруэнция G определяется системой уравнений Пфаффа: $\omega_i^j = 0$, $\omega_1^3 = \Gamma_1^{3k} \omega_k$, $\omega_2^3 = \Gamma_2^{31} \omega_1 - \Gamma_1^{31} \omega_2$,

$$\omega_3^1 = \Gamma_2^{31} \omega_1 + \Gamma_3^{12} \omega_2, \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{21} \omega_1 + \Gamma_1^{32} \omega_2,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k} \omega_k, \ \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k} \omega_k, \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k \omega_k, \tag{1}$$
$$\omega_4^1 = \Gamma_2^{31} (\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31}) \omega_1 + \Gamma_4^{12} \omega_2, \ \omega_4^2 = \Gamma_4^{21} \omega_1 + \Gamma_1^{32} (\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31}) \omega_2$$