### Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.
2. *Столяров А.В.* Системы уравнений Пфаффа в инволюции. Классические пространства. Чебоксары, 1998.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

*V. Kozyajkin*

## Complete conditions for stationarity of a point and a hyperplane in projective space

In projective space complete equations for stationarity of a point and a hyperplane are found by means of analytical apparatus with the condition of projectivity. It is shown, that forms characteristic for another analytical apparatus of projective space are appeared upon transition to nonhomogeneous coordinates of a point and nonhomogeneous equation of a hyperplane.

УДК 514.75

***А.В. Кулешов***

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*

## Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров. Ставится задача построения дифференциальных инвариантов данного семейства. Она решается в общем случае, характеризующемся невырожденностью некоторого тензора. Решение основано на методе подвижного репера и исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

***Ключевые слова:*** проективное пространство, гиперплоский элемент, дифференциальный инвариант, подвижной репер, метод внешних форм.

## Введение

Одной из основных задач дифференциальной геометрии многообразий, погруженных в проективное пространство, является построение дифференциальных инвариантов. Она решена лишь в ряде конкретных случаев, например для невырожденной гиперповерхности в проективном пространстве [1] и для гиперполос [2]. Оба указанных объекта (гиперповерхность и гиперполоса) — примеры семейств гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров. Поэтому приобретает актуальность задача распространения указанных выше результатов на случай произвольного семейства данного вида. Ее удалось решить в общем случае, характеризующемся невырожденностью некоторого тензора. Это решение и представлено в настоящей работе. Оно основано на методе подвижного репера Э. Картана, опирающемся на исчисление внешних дифференциальных форм [4]. В рамках этого метода производится частичная канонизация репера, основанная на применении леммы Н. М. Остиану [3].

## 1. Уравнения семейства $\mathbf{B}_{\mathbf{p+q}}$

Пусть $P_N$ — $N$-мерное проективное пространство ($N \geqslant 4$). Гиперплоским элементом пространства $P_N$ будем называть пару $\overset{*}{L}_{N-1} = (L_{N-1}, C)$, где $L_{N-1}$ — гиперплоскость, $C$ — точка, лежащая в $L_{N-1}$ (она называется центром элемента $\overset{*}{L}_{N-1}$).

В настоящей работе рассматриваются гладкие семейства гиперплоских элементов, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) центр $C$ элемента $\overset{*}{L}_{N-1}$ описывает $p$-мерную поверхность $S_p$ ( $p < N-2$ ), и касательная плоскость $T_p(C)$ к поверхности в точке $C$ лежит в плоскости $L_{n-1}$ каждого элемента $\overset{*}{L}_{n-1}$, имеющего точку $C$ своим центром;

2) каждая точка $C$ поверхности $S_p$ является центром гладкой $q$-параметрической связки $B_q(C)$ элементов семейства, где $1 \le q < N - p - 1$.

***Замечание 1***. Случай гиперполосы ($q = 0$) и семейства всевозможных касательных гиперплоских элементов над поверхностью $S_p$ ( $q = N - p - 1$ ) мы исключили из рассмотрения.

***Замечание 2***. В силу условия 1 касательную плоскость $T_p(C)$ можно назвать многомерным центром связки $B_q(C)$.

***Замечание 3***. Размерность рассматриваемого семейства равна $p + q$, поэтому обозначим его через $B_{p+q}$.

Поверхность $S_p$ является $p$-мерной огибающей плоскостей семейства $B_{p+q}$, поэтому такое семейство мы будем называть семейством гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров.

Дадим аналитическое описание семейства $B_{p+q}$, используя метод Картана — Лаптева. Отнесем $N$-мерное вещественное проективное пространство $P_N$ к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, $I, J, \ldots = \overline{1, n}$ с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1.1}$$

где форма $\theta$ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы $\omega^I$, $\omega_J^I$, $\omega_I$ проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют уравнениям Э. Картана [4, с. 121]

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K, \\ D\omega_K^I = \omega_K^J \wedge \omega_J^I + \omega^J \wedge (-\delta_K^I \omega_J - \delta_J^I \omega_K). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Разобьем индекс $I$ на три серии:

$$I = \{i, a, n\}: \; i, j, \ldots = \overline{1, p}; \; a, b, \ldots = \overline{p+1, N-1}$$

с дополнительным подразбиением индекса $a$:

$$a = \{u, y\}: \; u, v, \ldots = \overline{p+1, p+q}; \; y, z, \ldots = \overline{p+q+1, N-1}.$$

Произведем специализацию подвижного репера, совмещая вершину $A$ с центром $C$ элемента $L^*_{N-1}$ и помещая вершины $A_i$ на плоскость $T_p(C)$, а вершины $A_a$ — на плоскость $L_{N-1}$ данного элемента. Имеем

$$\omega^a = 0, \quad \omega^N = 0, \tag{1.3}$$

причем формы $\omega^i$, $\omega^a_i$, $\omega^N_i$, $\omega^N_a$ — главные. В качестве базисных форм семейства $B_{p+q}$ выберем $\omega^i \overset{def}{=} \theta^i$ в количестве $p$, а также формы $\omega^N_u \overset{def}{=} \theta^N_u$ в количестве $q$. Отметим, что формы $\theta^i$ также являются базисными для поверхности $S_p$.

Продолжая уравнения (1.3), получим

$$\omega^a_i = \Lambda^a_{ij}\theta^j, \quad \omega^N_i = \Lambda^N_{ij}\theta^j, \tag{1.4}$$

причем $\Lambda^a_{ij} = \Lambda^a_{ji}$, $\Lambda^N_{ij} = \Lambda^N_{ji}$. Формы $\omega^N_y$ выражаются через все базисные формы:

$$\omega^N_y = \Lambda^N_{yi}\theta^i + \Lambda^{Nu}_{yN}\theta^N_u. \tag{1.5}$$

С учетом выражений (1.3) и (1.5) структурные уравнения на базисные формы принимают вид

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j, \; D\theta^N_u = \theta^i \wedge \Theta^N_{ui} + \theta^N_v \wedge \Theta^{Nv}_{uN}, \tag{1.6}$$

где

$$\Theta^N_{ui} = -\Lambda^N_{ji}\omega^j_u - \Lambda^N_{yi}\omega^y_u, \; \Theta^{Nv}_{uN} = -(\omega^v_u - \delta^v_u\omega^N_N) - \Lambda^{Nv}_{yN}\omega^y_u. \tag{1.7}$$

Из уравнений (1.6) следует, что системы уравнений

$$1)\ \theta^i = 0, \; 2)\ \theta^i = 0, \quad \theta^N_u = 0$$

вполне интегрируемы. При этом

$$\theta^i = 0 \;\Leftrightarrow\; A - const,$$

$$\theta^i = 0, \quad \theta^N_u = 0 \;\Leftrightarrow\; L^*_{N-1} - const.$$

Сравнения по модулю базисных форм $\theta^i$, $\theta_u^N$ семейства $B_{p+q}$ будем обозначать символом «$\equiv$».

Формулы (1.3), (1.4), (1.5) — уравнения семейства в репере нулевого порядка. Продолжая уравнения (1.4), (1.5), получим

$$\Delta\Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^N \omega_N^a \equiv 0\,, \tag{1.8}$$

$$\Delta\Lambda_{ij}^N = \widetilde{\Lambda}_{ijk}^N \theta^k + \widetilde{\Lambda}_{ij}^u \theta_u^N\,, \tag{1.9}$$

$$\Delta\Lambda_{yN}^{Nu} + \Lambda_{yN}^{Nv} \Lambda_{zN}^{Nu} \omega_v^z - \omega_y^u \equiv 0\,, \tag{1.10}$$

$$\Delta\Lambda_{yi}^N - \Lambda_{ij}^N \omega_y^j + \Lambda_{yN}^{Nu} \Theta_{ui}^N \equiv 0\,, \tag{1.11}$$

где, например,

$$\Delta\Lambda_{yi}^N = d\Lambda_{yi}^N + \Lambda_{yi}^N \omega_N^N - \Lambda_{zi}^N \omega_y^z - \Lambda_{yj}^N \omega_i^j\,,$$

причем

$$\widetilde{\Lambda}_{ijk}^N = \Lambda_{ijk}^N - \Lambda_{ij}^y \Lambda_{yk}^N\,,\ \widetilde{\Lambda}_{ij}^u = -\Lambda_{ij}^u - \Lambda_{ij}^y \Lambda_{yN}^{Nu}\,,$$

а компоненты $\Lambda_{ijk}^N$ симметричны по всем нижним индексам. Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_{ij}^a, \Lambda_{ij}^N, \Lambda_{yN}^{Nu}, \Lambda_{yi}^N\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка многообразия $B_{p+q}$, содержащий 4 подобъекта $\Lambda_{ij}^N$, $\{\Lambda_{ij}^a, \Lambda_{ij}^N\}$, $\Lambda_{yN}^{Nu}$, $\{\Lambda_{ij}^N, \Lambda_{yN}^{Nu}, \Lambda_{yi}^N\}$.

Над семейством $B_{p+q}$ как над базой возникает главное расслоение $G(B_{p+q})$, типовым слоем которого является подгруппа $G \subset GP(n)$ стационарности пары $(L_{n-1}^*, T_p)$. Структурные уравнения данного расслоения получаются в результате подстановки выражений (1.3) — (1.5) в структурные уравнения (1.2), записанные с учетом разбиения индексов.

Пусть $\Lambda = \det\left\|\Lambda_{ij}^N\right\|$, а $\overline{V}_N^{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $\Lambda_{ij}^N$ матрицы $\left\|\Lambda_{ij}^N\right\|$. Тогда $\overline{V}_N^{ik} \Lambda_{kj}^N = \Lambda\delta_j^i$. Значит, $\overline{V}_N^{ij} \Lambda_{ij}^N = m\Lambda$. При этом

$$d\Lambda \equiv \Lambda(-m\omega_N^N + 2\omega_k^k)\,.$$

Отсюда, $\Lambda$ — относительный инвариант, поэтому обращение его в нуль инвариантно и выделяет некоторый подкласс семейств $B_{p+q}$ (точнее, базисных поверхностей $S_p$). Семейство $B_{p+q}$ с полем невырожденного тензора $\Lambda_{ij}^N$, то есть

$$\Lambda = \det\left\|\Lambda_{ij}^N\right\| \neq 0 \tag{1.12}$$

будем называть регулярным. В случае регулярного семейства можно ввести в рассмотрение обращенный тензор $V_N^{ij}$, компоненты которого образуют матрицу, обратную к $\left\|\Lambda_{ij}^N\right\|$:

$$V_N^{ik}\Lambda_{kj}^N = \delta_j^i\,.$$

Осуществляя продолжение (1.9), получим

$$\Delta\Lambda_{ijk}^N - 3\Lambda_{(ij}^N\Lambda_{k)s}^N\omega_N^s - 3\Lambda_{(ij}^N\omega_{k)} - 3\Lambda_{(ij}^a\Lambda_{k)s}^N\omega_a^s \equiv 0\,. \tag{1.13}$$

## 2. Частичная канонизация репера семейства $B_{p+q}$

Произведем частичную канонизацию подвижного репера аналитическим способом, а именно, положим

$$\Lambda_{yi}^N = 0\,,\ \Lambda_{yN}^{Nu} = 0\,. \tag{2.1}$$

Тогда сравнения (1.10) и (1.11) принимают вид

$$\omega_y^u \equiv 0\,,\ \Lambda_{ij}^N\omega_y^j \equiv 0\,,$$

что с учетом выражения (1.12) дает

$$\omega_y^u \equiv 0\,,\ \omega_y^i \equiv 0\,. \tag{2.2}$$

Таким образом, формы $\omega_y^u$, $\omega_y^i$ стали главными. Этих форм столько же, сколько компонент фундаментального объекта с зафиксированными значениями (2.1), поэтому по лемме Остиану [3] такая канонизация возможна.

Из сравнений (2.2) вытекает, что имеют место следующие разложения:

$$\omega_y^u = \Lambda_{yi}^u \theta^i + \Lambda_{yn}^{uv} \theta_v^n , \tag{2.3}$$

$$\omega_y^i = \Lambda_{yj}^i \theta^j + \Lambda_{yn}^{iu} \theta_u^n . \tag{2.4}$$

Продолжая уравнения (2.3) и (2.4), получим

$$\Delta\Lambda_{yi}^u - \Lambda_{yN}^{uv} \Theta_{vi}^N \equiv 0 , \ \Delta\Lambda_{yN}^{uv} \equiv 0 , \tag{2.5}$$

$$\Delta\Lambda_{yj}^i + \Lambda_{yj}^u \omega_u^i - \Lambda_{yN}^{iu} \Theta_{uj}^N - \delta_j^i \omega_y \equiv 0 , \tag{2.6}$$

$$\Delta\Lambda_{yN}^{iu} + \Lambda_{yN}^{vu} \omega_v^i \equiv 0 , \tag{2.7}$$

причем формы (1.8) упрощаются с учетом выражения (2.1):

$$\Theta_{ui}^N = -\Lambda_{ji}^N \omega_u^j , \ \Theta_{uN}^{Nv} = -(\omega_u^v - \delta_u^v \omega_N^N) . \tag{2.8}$$

Таким образом, объект $\{\Lambda_{yi}^u, \Lambda_{yN}^{uv}\}$ — тензор, содержащий подтензор $\{\Lambda_{yN}^{uv}\}$.

Формулы (1.8) и (1.9) также упрощаются:

$$\Delta\Lambda_{ij}^u + \Lambda_{ij}^N \omega_n^u \equiv 0 , \tag{2.9}$$

$$\Delta\Lambda_{ij}^y + \Lambda_{ij}^u \omega_u^y + \Lambda_{ij}^N \omega_N^y \equiv 0 , \tag{2.10}$$

$$\Delta\Lambda_{ij}^N = \Lambda_{ijk}^N \theta^k - \Lambda_{ij}^u \theta_u^N . \tag{2.11}$$

Геометрический смысл осуществленной канонизации состоит в том, что вершины $A_y$ репера помещаются на плоскость размерности $N-p-q-2$, инвариантно связанную с элементом $L_{N-1}^*$ семейства $B_{p+q}$ и пересекающуюся с касательной плоскостью $T_p(C)$ по центру $C$ этого элемента.

## 3. Дифференциальный инвариант $D_N$ семейства $B_{p+q}$

Рассмотрим величины

$$\Lambda^u_N = \frac{1}{p}\Lambda^u_{jk}V^{jk}_N, \quad \Lambda^y_N = \frac{1}{p}\Lambda^y_{jk}V^{jk}_N, \qquad (3.1)$$

$$\Lambda_k = \frac{1}{p+2}\Lambda^N_{ijk}V^{ij}_N, \quad D^N_{ijk} = \Lambda^N_{ijk} - 3\Lambda^N_{(ij}\Lambda_{k)}, \qquad (3.2)$$

$$D_k = D^N_{ijk}V^{ij}_N, \quad D_N = V^{ij}_N D_i D_j. \qquad (3.3)$$

Сравнения на них имеют соответственно вид

$$\Delta\Lambda^u_N + \omega^u_N \equiv 0, \quad \Delta\Lambda^y_N + \Lambda^u_N\omega^y_u + \omega^y_N \equiv 0. \qquad (3.4)$$

$$\Delta\Lambda_k \equiv (\Lambda^N_{ks}\omega^s_N - \omega_k) + \frac{1}{p+2}(p\Lambda^u_N\Lambda^N_{ks} + 2\Lambda^u_{ks})\omega^s_u, \qquad (3.5)$$

$$\Delta D^N_{ijk} \equiv 3\Lambda^u_{(ij}\Lambda^N_{k)s}\omega^s_u - \frac{3}{p+2}\Lambda^N_{(ij}(p\Lambda^N_{k)s}\Lambda^u_N + 2\Lambda^u_{k)s})\omega^s_u, \qquad (3.6)$$

$$\Delta D_k \equiv 0, \quad dD_N - D_N\omega^N_N \equiv 0. \qquad (3.7)$$

**Теорема**. *Объект $D_N$ является относительным инвариантом веса 1, присоединенным к дифференциальной окрестности третьего порядка семейства $B_{p+q}$.*

## Заключение

Построенный инвариант семейства $B_{p+q}$ позволяет строить внутренние оснащения этого семейства, в чем отчасти заключается его роль. В то же время остается открытым вопрос о геометрической характеристике найденного инварианта.

### *Список литературы*

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Столяров А.В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Мат. 1975. №10. С. 97—99.

3. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Т. 7, №2. С. 231—240.

4. *Cartan É.* Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. P., 1937.

*A. Kuleshov*

## About one projective invariant of a family of hyperplane elements with envelope surface of centers

In multidimensional projective space a family of hyperplane elements with envelope surface of centers is considered. The problem of construction of differential invariants of such a family is set. This problem is solved in a general case characterized by non-degenerating a certain tensor. The solution is based on the method of moving frames and calculation of exterior differential forms of E. Cartan.

УДК 574.76

***В.С. Малаховский***

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*

## Об одном классе конгруэнций коник в трехмерном проективном пространстве

Исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) $V_2$ коник $C$ в $P_3$, имеющих две фокальные точки $A_1$ и $A_2$, касательные к конике, в которых пересекаются в характеристической точке $A_0$ плоскости коники и являются асимптотическими касательными поверхности $(A_0)$, а касательные к линиям на $(A_i)$, соответствующим фокальным линиям на поверхности