фокальное многообразие принимает вид

$$\left(\delta^u_v x^0 + x^p (M^u_{pv} + M^u_{pq} L^q_v)\right)\rho^v = 0, \quad x^u = 0. \qquad (11)$$

Система (11) допускает нетривиальные решения для ρ^v, только когда

$$\det \| \delta^u_v x^0 + x^p (M^u_{pv} + \dot{M}^u_{pq} L^q_v) \| = 0, \quad x^u = 0. \qquad (12)$$

Уравнения (12) определяют (τ-1)-мерное алгебраическое многообразие $\mathcal{M}_{\tau-1}(\Lambda, N)$ порядка (n-τ), принадлежащее линейному элементу Λ-распределения.

5. Распределение $\mathcal{H}^\tau_m$ устанавливает определенное им самим соответствие между нормалями $N_{n-\tau}$ первого и нормалями $\mathcal{K}_{\tau-1}$ второго рода. Действительно, в плоскости Π_τ определено инвариантное фокальное многообразие $\mathcal{M}_{\tau-1}(\Lambda, N)$ (12), соответствующее нормали $N_{n-\tau}$ первого рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^\tau_m$.

Линейная поляра центра A_0 относительно многообразия $\mathcal{M}_{\tau-1}(\Lambda, N)$ является (τ-1)-мерной нормалью $\mathcal{K}_{\tau-1}$ второго рода распределения $\mathcal{H}^\tau_m$. Такое соответствие нормалей первого и второго рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^\tau_m$ является обобщенным проективитетом Бомпьяни-Пантази [1].

Список литератуы

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.-Тр.геометр.семинара, ВИНИТИ АН СССР, 1971, 3, с.49-94.

2. Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^\tau_m \subset P_n$ - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с.111-115.

УДК 514.75

С.В. Ш м е л е в а

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК В P_3 С ДВУМЯ ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции M линейчатых квадрик Q, имеющие две невырождающиеся поверхности, описанные фокальными точками A_0 и A_3 второго порядка [1]. Доказано, что торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1, A_2), где A_0A_i, A_3A_i-прямолинейные образующие квадрики Q_i (i =1,2), соответствуют. Установлены характеристические признаки соответствия асимптотических линий на поверхностях (A_0) и A_3. Исследованы конгруэнции M, у которых (A_0) и (A_3) образуют пару Годо [2] или являются квадриками.

§1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В репере $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ квадрика $Q \in M$ и конгруэнция M задаются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F} \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} \omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = a_i \omega^i - \frac{1}{2} h_i \omega^j, \ \omega^3_i = \omega^j, \\ \omega^0_i = \omega^j_3, \ \omega^i_3 = b^i_k \omega^k, \ \Omega \equiv \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3 = h_k \omega^k, \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$h_i (b^j_j - b^i_i) - h_j b^j_i - 2 b^i_j a_i = 0, \qquad (1.3)$$

причем $b \equiv b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2 \neq 0 \qquad (1.4)$

Здесь и в дальнейшем $\omega^i = \omega^i_0$, ω^β_α (α, β =0,1,2,3) - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, i,j,k=1,2,

$i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Замыкая систему (1.2), получим:

$$2\Delta a_i \wedge \omega^i - \Delta h_i \wedge \omega^j = 0, \quad \Delta b^i_k \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta h_k \wedge \omega^k = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\Delta a_i = da_i + a_i(\omega^0_0 - 2\omega^i_i + \omega^j_j) - \tfrac{1}{2}\left(a_i h_j + \tfrac{1}{2}(h_i)^2\right)\omega^j,$$
$$\Delta h_i = dh_i + h_i(\omega^0_0 - \omega^i_i), \quad \Delta b^i_i = db^i_i + b^i_i(\omega^0_0 - \omega^3_3), \tag{1.6}$$
$$\Delta b^j_i = db^j_i + b^j_i(\omega^0_0 - \omega^i_i + \omega^j_j - \omega^3_3).$$

Следовательно, конгруэнции M определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Анализируя систему (I.2), (I.3), убеждаемся в справедливости следующих теорем.

1.1. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответствуют.

1.2. Прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) тогда и только тогда сопряжена поверхности (A_0), когда фокусы ее луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

I.3. Касательная плоскость к поверхности (A_i) тогда и только тогда содержит точку A_j; когда одно семейство асимптотических линий на поверхностях (A_0) и (A_3) соответствует.

1.4. Поверхность (A_0) (соответственно (A_3)) тогда и только тогда линейчатая, когда касательная плоскость к (A_1) или к (A_2) содержит точку A_0 (соответственно A_3) или когда одна из поверхностей (A_1) или (A_2) вырождается в линию.

1.5. Поверхность (A_0) (соответственно (A_3)) тогда и только тогда является квадрикой, когда выполнено одно из следующих условий: I/ касательные плоскости к поверхностям (A_1) и (A_2) пересекаются по прямой, проходящей через точку A_0 (соответственно A_3); 2/ Поверхность (A_1) или (A_2) вырождается в линию, а касательная плоскость к (A_2) или (A_1) содержит точку A_0 (соответственно A_3); 3/ Обе поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии.

1.6. Ассоциированные квадрики $F_i = 0$, $\overset{*}{F}_i = 0$ [1], присоединенные к поверхностям (A_0) и (A_3), распадаются на пары плоскостей с осью A_0A_3.

§2. КОНГРУЭНЦИИ M_0

О п р е д е л е н и е 2.1. Конгруэнцией M_0 называется конгруэнция M, у которой точки A_3 и A_i ($i = 1, 2$) полярно сопряжены относительно квадрики Ли поверхности (A_0).

Т е о р е м а 2.1. Конгруэнции M_0 существуют и определяются с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрика Ли поверхности (A_0) конгруэнции M определяется уравнением

$$2(x^1x^2 - x^0x^3) + h_k x^3 x^k + h(x^3)^2 = 0, \tag{2.1}$$

где h определяется из уравнений

$$\Delta h_i = h_{ii}\omega^i + h\omega^j. \tag{2.2}$$

Следовательно, конгруэнция M_0 характеризуется соотношениями

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0. \tag{2.3}$$

Учитывая (2.3) в (1.2.), (1.3) и (1.5), убеждаемся в справедливости теоремы. Из (2.3), (1.3) непосредственно вытекает

Т е о р е м а 2.2. Конгруэнция M тогда и только тогда является конгруэнцией M_0, когда выполнено одно из следующих условий: I/ Точки A_1 и A_2 полярно сопряжены относительно обеих ассоциированных квадрик $F_i = 0$; 2/ Конгруэнция M является конгруэнцией квадрик Ли поверхности (A_0) или поверхности (A_3); 3/ Касательные к линии $\omega^i = 0$ на поверхностях (A_i) пересекают прямую A_0A_3; 4/ Точки A_i принадлежат ассоциированным квадрикам $F_j = 0$; 5/ Пара поверхностей (A_0) и (A_3) является парой Годо [2].

§3. КОНГРУЭНЦИИ M_1

О п р е д е л е н и е 3.1. Конгруэнцией M_1 называется конгруэнция M , у которой асимптотические линии на на фокальных поверхностях (A_0) и (A_3) соответстствуют.

Из этого определения следует, что существуют два и только два класса конгруэнций M_1 : конгруэнции M_1' , у которых касательные к соответствующим друг другу линиям не пересекаются, и конгруэнции M_1'' , у которых эти касательные пересекаются. Конгруэнции M_1' и M_1'' определяются соответственно соотношениями:

$$b_1^1=0,\ b_2^2=0,\ b_1^2 b_2^1\neq 0, \tag{3.1}$$

$$b_1^2=0,\ b_2^1=0,\ b_1^1 b_2^2\neq 0. \tag{3.2}$$

Конгруэнции M_1' разбиваются на попарно пересекающиеся четыре подкласса: конгруэнции $M_{1,i}$ ($h_i=0$, $h_j\neq 0$, $S\neq 0$), определяемые с произволом одной функции одного аргумента, конгруэнции $M_{1,3}'$ ($S=0$), определяемые с произволом двух функций одного аргумента, и конгруэнции $M_{1,4}'$ ($S h_1 h_2\neq 0$), определяемые вполне интегрируемой системой Пфаффа.

Конгруэнции M_1'' разбиваются на конгруэнции M_0 и конгруэнции $M_{1,1}''$, определяемые с произволом одной функции двух аргументов и характеризуемые соотношениями (3.2) и $b_1^1=b_2^2$.

Для конгруэнций M_1 справедливы следующие теоремы:

3.1. Если поверхность (A_0) конгруэнции M_1 линейчатая, то и поверхность (A_3) - линейчатая, и наоборот.

3.2. Фокальная поверхность (A_0) конгруэнции M_1' тогда и только тогда линейчатая, когда точка A_3 полярно сопряжена с одной из точек A_1, A_2 относительно своей квадрики Ли.

3.3. Ассоциированные квадрики, присоединенные к поверхностям (A_0) и (A_3) конгруэнции M_1'', попарно совпадают.

§4. КОНГРУЭНЦИИ M_2

О п р е д е л е н и е 4.1. Конгруэнцией M_2 называется конгруэнция M , у которой обе фокальные поверхности (A_0) и (A_3) являются квадриками.

Т е о р е м а 4.1. Существуют три и только три типа конгруэнций M_2 : конгруэнции $M_{2,i}$, характеризуемые соотношениями

$$a_1=a_2=h_i=b_j^i=0,\ h_j\neq 0\quad (i=1,2), \tag{4.1}$$

и конгруэнции $M_{2,3}$, определяемые соотношениями

$$a_1=a_2=b_1^2=b_2^1=0,\ b_1^1=b_2^2=1. \tag{4.2}$$

Каждый из этих типов конгруэнций определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения $a_1=a_2=a_1^*=a_2^*=0$ дают:

$$h_1 b_1^2=0,\ h_2 b_2^1=0. \tag{4.3}$$

Получаем только конгруэнции $M_{2,i}, M_{2,3}$. Продолжая системы уравнений этих конгруэнций, убеждаемся в справедливости теоремы.

Квадрики (A_0) и (A_3) конгруэнций $M_{2,i}$ определяются, соответственно уравнениями:

$$2(x^1x^2-x^0x^3)+h_2x^2x^3=0, \tag{4.4}$$

$$2(x^1x^2-x^0x^3)+h_2x^2x^0=0. \tag{4.5}$$

Эти квадрики имеют в точке A_i общие прямолинейные образующие.

Т е о р е м а 4.2. Конгруэнция M_1 тогда и только тогда является конгруэнцией $M_{2,i}$, когда фокальное многообразие квадрики Q состоит из фокальных прямых A_iA_0 и A_iA_3 .

Доказательство непосредственно вытекает из рассмотрения системы уравнений

$$\mathfrak{F}=0,\ \mathfrak{F}_i=0. \tag{4.6}$$

Т е о р е м а 4.3. Поверхность (A_i) конгруэнции $M_{2,j}$ вырождается в линию. Торсы одного семейства прямолинейной конгруэнции (A_1A_2), ассоциированной с $M_{2,j}$, являются конусами и соответствуют прямолинейным образующим квадрики (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конгруэнции $M_{2,j}$ справедливы уравнения.

$$\omega_i^j = -\frac{1}{2} k_i \omega^j, \quad \omega_i^0 = b_j^j \omega^j \qquad (4.7)$$

Имеем

$$dA_i = (b_j^j A_0 - \frac{1}{2} k_i A_j + A_3)\omega^j + \omega_i^i A_i \qquad (4.8)$$

Следовательно, поверхность (A_i) вырождается в линию. Прямолинейные образующие $\omega^j = 0$ квадрики (A_0) соответствуют конусам прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

Т е о р е м а 4.4. Прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) ассоциированная с конгруэнцией $M_{2,3}$ является связкой прямых с центром в точке

$$B = A_0 - A_3 \qquad (4.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конгруэнции $M_{2,3}$ выполняются условия

$$\omega_3^i = \omega^i, \quad \omega_0^0 = \omega_3^3, \qquad (4.10)$$

откуда следует, что

$$dB = \omega_0^0 B. \qquad (4.11)$$

Список литературы

1. Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков.–В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1982, Вып. 13, с.60–64.

2. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. ОНТИ. М.–Л., 1937.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 31 мая 1982 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 20 октября 1982 года по 25 мая 1983 года.

20.10.1982г. И.И.Б а г л а е в (г.Улан-Удэ). Линейные системы гиперквадрик и их применение к изучению семейств гиперквадрик.

27.10.1982г. Л.А.Ж а р и к о в а. О связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов.

3.11.1982г. С.В.С а н г а д ж и е в а (г.Лиепая). Конгруэнции квадрик с вырождающимися фокальными поверхностями.

17.11.1982г. М.Ф.К о с а р е н к о. Проективные связности, ассоциированные с гиперполосой $SH_r \subset S_N$.

24.11.1982г. М.В.К р е т о в. О специальных подклассах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик.

1.12.1982г. Е.А. М и т р о ф а н о в а. Последовательность G-структур реперов высших порядков, ассоциированных с главным расслоением группы $A_m^p(n)$ над базой R^n.

8.12.1982г. Н.Т.М о ч е р н ю к (г.Караганда). Вырожденные одномерные многообразия коник.

15.12.1982г. Ю.И.П о п о в. Проективные связности трехсоставных распределений проективного пространства.

22.12.1982г. В.С.М а л а х о в с к и й. Конгруэнции квадрик с распадающейся фокальной коникой.