ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Лучинин А.А.

О НЕГОЛОНОМНОМ МНОГООБРАЗИИ ПАР ТОЧЕК.

В настоящей статье изучается неголономное многообразие $G_{2n}(F,\tilde{F})$ пар точек в n-мерном проективном пространстве. Находятся некоторые геометрические объекты и определяемые ими геометрические образы многообразия $G_{2n}(F,\tilde{F})$. Рассмотрения всюду имеют локальный характер. Все встречающиеся в данной статье функции предполагаются аналитическими.

§I. Дифференциальные уравнения неголономного многообразия пар точек.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A_a\}$, уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$dA_a = \omega_a^b A_b , \tag{1}$$

$$(a,b,c = 1,2,\dots,n+1) ,$$

где I-формы ω_a^b удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b \tag{2}$$

и условию

$$\omega_a^a = 0$$

В качестве рассматриваемой пары точек (пары фигур $F=(F_1,F_2)$) в пространстве P_n возьмем пару точек, являющуюся вершинами A_1 и A_{n+1} репера. Тогда формы

$$\Omega^i \overset{def}{=\!=} \omega_1^{i+1} , \quad \Omega^\alpha \overset{def}{=\!=} \omega_{n+1}^{\alpha-n} \quad \left(\begin{matrix} i,j,k,i_1,j_1,k_1,\dots = 1,2,\dots,n ; \\ \alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\dots = n+1,\dots,2n \end{matrix} \right)$$

являются главными.

Сопоставляя с каждой парой точек A_1 и A_{n+1} некоторую фигуру $\tilde{F}$, определенную объектом $\Gamma_1=\{\Lambda_i^\alpha\}$, компоненты которого удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla\Lambda_i^\alpha = M_{ij}^\alpha \Omega^j + M_{i\beta}^\alpha \Omega^\beta ; \tag{3}$$

мы получаем $2n$-мерное многообразие $G_{2n}(F,\tilde{F})$, которое, следуя [I], будем называть неголономным многообразием пар точек. Многообразие $G_{2n}(F,\tilde{F})$ погружено в $n(n+2)$-мерное пространство касательных элементов и определяется с произволом n^2 функций $2n$ аргументов (см.[2]).

Здесь и в дальнейшем оператор ∇ определим по формуле

$$\nabla X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_t\beta_1\dots\beta_q} = dX^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_t\beta_1\dots\beta_q} - X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{kj_2\dots j_t\beta_1\dots\beta_q}\,\omega^{k+1}_{j_1+1} -$$
$$-\dots - X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_{t-1}k\beta_1\dots\beta_q}\,\omega^{k+1}_{j_t+1} - X^{i_1\dots i_p\alpha_1\dots\alpha_s}_{j_1\dots j_t\gamma\beta_2\dots\beta_q}\,\omega^{\gamma-n}_{\beta_1-n} - \dots -$$

$$- X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_{q-1} \gamma} \, \omega^{\gamma - n}_{\beta_q - n} + X^{k i_2 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_q} \, \omega^{i_1 + 1}_{k+1} + \dots +$$

$$+ X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_{s-1} \gamma}_{j_1 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_q} \, \omega^{\alpha_s - n}_{\gamma - n} + \{(t-p)\omega^1_1 + (q-s)\omega^{n+1}_{n+1}\} X^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s}_{j_1 \dots j_t \beta_1 \dots \beta_q} . \quad (4)$$

Фундаментальным геометрическим объектом первого порядка многообразия $G_{2n}(F,\widetilde{F})$ является объект

$$\Gamma_1 = \{ \Lambda^\alpha_i , M^\alpha_{ij} , M^\alpha_{i\beta} \}, \quad (5)$$

компоненты $M^\alpha_{ij}, M^\alpha_{i\beta}$ которого удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla M^\alpha_{ij} + \Lambda^\alpha_i \omega^1_{j+1} + \Lambda^\alpha_j \omega^1_{i+1} = M^\alpha_{ijk} \Omega^k + M^\alpha_{ij\beta} \Omega^\beta ,$$

$$\nabla M^\alpha_{i\beta} - \Lambda^\alpha_i \omega^{n+1}_{\beta - n} - \Lambda^\gamma_i \delta^\alpha_\beta \omega^{n+1}_{\gamma - n} = M^\alpha_{i\beta j} \Omega^j + M^\alpha_{i\beta\gamma} \Omega^\gamma , \quad (6)$$

где

$$M^\alpha_{i[\beta j]} = M^\alpha_{i[jk]} = M^\alpha_{i[\beta\gamma]} = 0 .$$

Из (6) следует, что совокупности величин

$$\Gamma_1' = \{ \Lambda^\alpha_i , M^\alpha_{ij} \} , \quad \Gamma_1'' = \{ \Lambda^\alpha_i , M^\alpha_{i\beta} \} \quad (7)$$

образуют подобъекты объекта Γ_1 .

Объект $\widetilde{\Gamma}_1$,который является тензором [3], определяет соответствие между связкой прямых, проходящих через точку A_1 ,и связкой прямых, проходящих через точку A_{n+1}. Действительно, каждой прямой $x = x^{i+1}(A_1 A_{i+1})$ соответствует прямая $y = x^{i+1} \Lambda^\alpha_i (A_{n+1} A_{\alpha - n})$. Так как в общем случае тензор $\{ \Lambda^\alpha_i \}$ является невырожденным, то это соответствие

является взаимно-однозначным.

Нетрудно доказать, что объект Γ_1 является основным [3] для многообразия $G_{2n}(F,\widetilde{F})$.

§2. Геометрические объекты, охваченные основным фундаментальным объектом Γ_1 .

Считая, что тензор $\widetilde{\Gamma} = \{ \Lambda^\alpha_i \}$ - невырожденный, мы можем ввести в рассмотрение обращенный тензор $\widetilde{\Gamma}^*_1 = \{ V^i_\alpha \}$ по формулам

$$V^i_\alpha \Lambda^\alpha_j = \delta^i_j , \quad V^i_\alpha \Lambda^\beta_i = \delta^\beta_\alpha , \quad (8)$$

компоненты которого удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla V^i_\alpha = V^i_{\alpha j} \Omega^j + V^i_{\alpha\beta} \Omega^\beta , \quad (9)$$

где

$$V^i_{\alpha j} = - V^k_\alpha V^i_\beta M^\beta_{kj} , \quad V^i_{\alpha\beta} = - V^k_\alpha V^i_\gamma M^\gamma_{k\beta} \quad (10)$$

Продолжение уравнений (9) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\nabla V^i_{\alpha j} - V^i_\alpha \omega^1_{j+1} - V^k_\alpha \delta^i_j \omega^1_{k+1} = V^i_{\alpha j k} \Omega^k + V^i_{\alpha j \beta} \Omega^\beta ,$$

$$\nabla V^i_{\alpha\beta} + V^i_\alpha \omega^{n+1}_{\beta - n} + V^i_\beta \omega^{n+1}_{\alpha - n} = V^i_{\alpha\beta j} \Omega^j + V^i_{\alpha\beta\gamma} \Omega^\gamma . \quad (11)$$

Из (6) и (II) имеем:

$$\nabla M^\alpha_{i\alpha} - (n+1) \Lambda^\alpha_i \omega^{n+1}_{\alpha - n} = M^\alpha_{i\alpha j} \Omega^j + M^\alpha_{i\alpha\gamma} \Omega^\gamma , \quad (12_1)$$

$$\nabla V^i_{\alpha i} - (n+1) V^i_\alpha \, \omega^1_{i+1} = V^i_{\alpha i j}\Omega^j + V^i_{\alpha i \gamma}\Omega^\gamma . \qquad (12_2)$$

Свертывая (12_1) и (12_2) соответственно с V^i_β и Λ^α_j, получаем

$$\nabla e_\alpha - \omega^{n+1}_{\alpha-n} = e_{\alpha i}\Omega^i + e_{\alpha\beta}\Omega^\beta , \qquad (13)$$

$$\nabla e_i - \omega^1_{i+1} = e_{ij}\Omega^j + e_{i\alpha}\Omega^\alpha ,$$

где

$$e_\beta = \frac{1}{n+1} M^\alpha_{i\alpha} V^i_\beta \;, \qquad e_i = \frac{1}{n+1} V^j_{\alpha j}\Lambda^\alpha_i \, . \qquad (14)$$

Продолжение дифференциальных уравнений (13) приводит к системе, которой удовлетворяют величины $e_{ij}, e_{\alpha\beta}, e_{i\alpha}, e_{\alpha i}$

$$\nabla e_{ij} + e_i \, \omega^1_{j+1} + e_j \, \omega^1_{i+1} = e_{ijk}\Omega^k + e_{ij\alpha}\Omega^\alpha ,$$

$$\nabla e_{\alpha\beta} + e_\alpha \, \omega^{n+1}_{\beta-n} + e_\beta \, \omega^{n+1}_{\alpha-n} = e_{\alpha\beta i}\Omega^i + e_{\alpha\beta\gamma}\Omega^\gamma ,$$

$$\nabla e_{i\alpha} = e_{i\alpha j}\Omega^j + e_{i\alpha\beta}\Omega^\beta , \qquad (15)$$

$$\nabla e_{\alpha i} = e_{\alpha i j}\Omega^j + e_{\alpha i\beta}\Omega^\beta .$$

Отсюда сразу следует, что величины $e_{i\alpha}$ и $e_{\alpha i}$ являются тензорами (в общем случае не симметричными).

Введем в рассмотрение величины

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(e_{(ij)} + e_{(i}e_{j)}\right), \quad a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(e_{(\alpha\beta)} + e_{(\alpha}e_{\beta)}\right), \qquad (16)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2} e_{[ij]} \;, \qquad b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{[\alpha\beta]} \, . \qquad (17)$$

Из (13),(15) следует, что эти величины являются тензорами.

Величины

$$a_i = M^\alpha_{i\alpha} - M^\beta_{j\alpha} V^j_\beta \Lambda^\alpha_i \;, \quad a_\alpha = V^i_{\alpha i} - V^j_{\beta i}\Lambda^\beta_j V^i_\alpha \qquad (18)$$

также являются тензорами, так как из (3),(6),(9),(11) имеем:

$$\nabla a_i = a'_{ij}\Omega^j + a'_{i\alpha}\Omega^\alpha ,$$

$$\nabla a_\alpha = a'_{\alpha i}\Omega^i + a'_{\alpha\beta}\Omega^\beta . \qquad (19)$$

§3. Некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием $G_{2n}(F, \widetilde{F})$.

1. Квазитензоры [3] e_i и e_α определяют две инвариантные гиперплоскости L^1_{n-1} и L^2_{n-1} :

$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0 , \qquad (20)$$

$$x^{n+1} + e_\alpha x^{\alpha-n} = 0 , \qquad (21)$$

соответственно, а тензоры (18) определяют две инвариантные гиперплоскости

$$a_i x^{i+1} = 0 \, , \quad a_\alpha x^{\alpha-n} = 0 \, , \qquad (22)$$

проходящие соответственно через точки A_1 и A_{n+1} .

2. Тензоры (16) определяют два инвариантных гиперконуса

$$a_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} = 0, \qquad (23)$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha-n} x^{\beta-n} = 0. \qquad (24)$$

с вершинами A_1 и A_{n+1} соответственно.

3. Тензоры (17) определяют два инвариантных линейных гиперкомплекса

$$b_{ij}\, P^{i+1,j+1} = 0, \qquad (25)$$

$$b_{\alpha\beta}\, P^{\alpha-n,\beta-n} = 0. \qquad (26)$$

С помощью этих гиперкомплексов можно установить соответствие между гиперплоскостями, проходящими через точки A_1 и A_{n+1}.

Действительно, пусть задана точка

$$X = t^{i+1} A_{i+1} + t^1 A_1 .$$

В нуль-системе гиперкомплекса (25) ей соответствует гиперплоскость

$$e_{[ij]}\, x^{i+1} t^{j+1} = 0, \qquad (27)$$

проходящая через точки A_1 и X. В нуль-системе гиперкомплекса (26) этой же точке соответствует гиперплоскость

$$e_{[\alpha\beta]}\, x^{\alpha-n} t^{\beta-n} = 0, \qquad (28)$$

проходящая через точки A_{n+1} и X. Назовем гиперплоскости (27) и (28) соответствующими гиперплоскостями относительно точки X.

4. Рассмотрим I-семейства, задаваемые уравнениями

$$\Omega^{\alpha} = 0,\ \Omega^{i} = x^{i+1}\theta,\ \mathcal{D}\theta = 0 \qquad (29)$$

и I-семейства, задаваемые уравнениями

$$\Omega^{i} = 0,\ \Omega^{\alpha} = x^{\alpha-n}\,\tilde{\theta},\ \mathcal{D}\tilde{\theta} = 0, \qquad (30)$$

где функции x^{i+1} и $x^{\alpha-n}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla x^{i+1} = x^{i+1}_{j}\,\Omega^{j} + x^{i+1}_{\alpha}\,\Omega^{\alpha}, \qquad (31)$$

$$\nabla x^{\alpha-n} = x^{\alpha-n}_{j}\,\Omega^{j} + x^{\alpha-n}_{\beta}\,\Omega^{\beta}.$$

Возьмем касательную к линии, описываемой точкой A_1 вдоль (29). Эта касательная пересекает гиперплоскость $\overset{1}{L}_{n-1}$ в точке

$$Y = x^{i+1} P_{i+1},$$

где

$$P_{i+1} = -e_i A_1 + A_{i+1}. \qquad (32)$$

Имеем:

$$dY = \{ dx^{i+1} + x^{j+1}\omega^{i+1}_{j+1} - e_j x^{j+1}\Omega^{i} \} P_{i+1} +$$

$$+ (e_{ij} + e_i e_j)\, x^{i+1}\Omega^{j} A_1 .$$

Отсюда следует, что геометрическим местом точек Y таких, что касательные к линиям, описываемым этими точками вдоль (29) не выходят из гиперплоскости $\overset{1}{L}_{n-1}$, является квадрика

$$a_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} = 0, \qquad x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \qquad (33)$$

которая является пересечением гиперконуса (23) с гиперплоскостью L^1_{n-1}.

Аналогично, с помощью (30) характеризуется гиперконус (24). Характеристика гиперплоскости (20) вдоль I-семейств

$$\Omega^i = x^{i+1}\,\theta^*,\ \Omega^\alpha = x^{\alpha-n}\,\theta^*,\ \mathcal{D}\theta^* = 0, \tag{34}$$

где x^{i+1} и $x^{\alpha-n}$ образуют геометрические объекты, определяется уравнениями

$$\begin{gathered}(e_{ij} + e_i e_j)\,x^{i+1} x^{j+1} + e_{i\alpha} x^{i+1} x^{\alpha-n} = 0,\\ x^1 + e_i\,x^{i+1} = 0.\end{gathered} \tag{35}$$

Таким образом, имеем, что вдоль I-семейств (29) гиперквадрика (33) гиперплоскости L^1_{n-1} представляет собой совокупность точек, принадлежащих характеристике гиперплоскости L^1_{n-1} вдоль (29).

Вдоль I-семейств (29) характеристика квадрики (33) определяется уравнениями

$$\begin{gathered}c_{ijk}\,x^{i+1}\,x^{j+1}\,x^{k+1} = 0,\\ a_{ij}\,x^{i+1}\,x^{j+1} = 0,\\ x^1 + e_i\,x^{i+1} = 0,\end{gathered} \tag{36}$$

где

$$c_{ijk} = \frac{1}{6}\{a_{(ijk)} + 2a_{(ij}e_{k)} + a_{(ik}e_{j)} + a_{(kj}e_{i)}\} -$$

- симметричный тензор.

Рассмотрим в гиперплоскости L^1_{n-1} поверхность третьего порядка, проходящую через алгебраическую поверхность (36), которую зададим уравнениями

$$\begin{gathered}\tilde{a}_{ijk}\,x^{i+1}\,x^{j+1}\,x^{k+1} = 0,\\ x^1 + e_i\,x^{i+1} = 0,\end{gathered} \tag{37}$$

где

$$\tilde{a}_{ijk} = c_{ijk} + \lambda_i\,a_{jk} + \lambda_j\,a_{ik} + \lambda_k\,a_{ij}. \tag{38}$$

Величины λ_i найдем из условия аполярности искомой поверхности третьего порядка и квадрики (33), т.е. из условия (см. [4])

$$\tilde{a}_{ijk}\,a^{ij} = 0, \tag{39}$$

где $a^{ij} a_{ik} = \delta^j_k$. Из условия (39) получаем, что

$$\lambda_i = -\frac{1}{n+2}\,c_{ijk}\,a^{jk}.$$

Тогда тензор (38) запишется в виде

$$\tilde{a}_{ijk} = c_{ijk} - \frac{a^{i_1 j_1}}{n+2}\{c_{i i_1 j_1} a_{jk} + c_{j i_1 j_1} a_{ik} + c_{k i_1 j_1} a_{ij}\}. \tag{40}$$

Пусть задана точка $Y_1 = y_1^{i+1} P_{i+1}$ гиперплоскости L^1_{n-1}. Найдем поляру этой точки относительно поверхности (37). Имеем:

$$a_{ijk}\,x^{i+1}\,x^{j+1}\,y_1^{k+1} = 0,\ x^1 + e_i\,x^{i+1} = 0. \tag{41}$$

Совокупность поляр всех точек квадрики (4I) относительно квадрики (33) определяется уравнениями

$$\widetilde{a}_{ijk}\, a^{i_1 i}\, a^{j_1 j}\, y_1^{k+1}\, x_{i_1+1}\, x_{j_1+1} = 0,$$
$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0 \qquad (42)$$

Таким образом, каждой точке $Y_1 \in L^1_{n-1}$ соответствует в гиперплоскости L^1_{n-1} квадрика (4I) и поверхность второго класса (42).

Пусть точка $Z = z^{i+1} P_{i+1}\ (Z \neq Y_1)$ принадлежит гиперплоскости L^1_{n-1}. Её полярой относительно (4I) является $(n-2)$-плоскость

$$\widetilde{a}_{ijk}\, y_1^{k+1}\, z^{j+1}\, x^{i+1} = 0,$$
$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0. \qquad (43)$$

Полюсом этой $(n-2)$-плоскости относительно (42) является точка $\widetilde{Z} = \widetilde{z}^{i+1} P_{i+1}$, где

$$\widetilde{z}^{i+1} = \widetilde{a}_{i_1 j_1 j}\, \widetilde{a}_{i_2 j_2 k}\, a^{i_1 i_2}\, a^{ij}\, y_1^{i_1+1}\, y_1^{k+1}\, z^{j_2+1} \qquad (44)$$

Таким образом, каждой точке $Y_1 \in L^1_{n-1}$ алгебраические поверхности (4I) и (42) ставят в соответствие проективное преобразование $\Pi(Y_1)$ гиперплоскости L^1_{n-1} в себя, определяемое при фиксированных y_1^{i+1} формулами (44). Это проективное преобразование будет преобразованием W [4] тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{a}_{i_1 j_1 j}\, \widetilde{a}_{i_2 j_2 k}\, a^{i_1 i_2}\, a^{j j_2}\, y_1^{j_1+1}\, y_1^{k+1} = 0.$$

Итак, геометрическим местом точек $Y \in L^1_{n-1}$, для которых проективное преобразование $\Pi(Y)$ будет преобразованием W является квадрика

$$\overset{*}{a}_{ij}\, x^{i+1}\, x^{j+1} = 0,$$
$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \qquad (45)$$

где

$$\overset{*}{a}_{ij} = \widetilde{a}_{i_1 j_1 i}\, \widetilde{a}_{i_2 j_2 j}\, a^{i_1 i_2}\, a^{j_1 j_2}. \qquad (46)$$

Рассмотрим квадрику (4I) и найдем геометрическое место $(n-2)$-плоскостей, являющихся полярами точек квадрики (4I) относительно квадрики (33). Этим геометрическим местом $(n-2)$-плоскостей является поверхность третьего класса

$$\widetilde{a}^{ijk}\, x_{i+1}\, x_{j+1}\, x_{k+1} = 0,$$
$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0, \qquad (47)$$

где

$$\widetilde{a}^{ijk} = \widetilde{a}_{i_1 j_1 k_1}\, a^{i i_1}\, a^{j j_1}\, a^{k k_1},$$

x_i, x_α – дуальные координаты.

Рассмотрим вектор $c^i = \widetilde{a}^{ijk}\, \overset{*}{a}_{jk}$, который, по аналогии с [5], назовем основным вектором гиперплоскости L^1_{n-1} и точку $C = c^i P_{i+1}$ – основную точку гиперплоскости L^1_{n-1}. Выясним её геометрический смысл.

Возьмем точку $Z_1 = z_1^{i+1} P_{i+1}$, принадлежащую гиперплоскости L^1_{n-1}. Её полярой относительно квадрики (33) является $(n-2)$-плоскость

$$a_{ij}\, x^{i+1}\, z_1^{j+1} = 0, \quad x^1 + e_i x^{i+1} = 0. \qquad (48)$$

Полюсом $(n-2)$-плоскости (48) относительно (47) является поверхность второго класса

$$a^{ijk} x_{i+1} x_{j+1} a_{kj_1} z_1^{j_1+1} = 0,$$
$$x^1 + e_i x^{i+1} = 0. \tag{49}$$

Пусть $Y_2 = y_2^{i+1} P_{i+1}$ — точка гиперплоскости L^1_{n-1} отличная от Z_1. Полярой точки Y_2 относительно квадрики (45) является $(n-2)$-плоскость

$$\overset{*}{a}_{ij} y_2^{i+1} x^{j+1} = 0, \quad x^1 + e_i x^{i+1} = 0. \tag{50}$$

Полюсом этой $(n-2)$-плоскости относительно поверхности (49) будет точка $Q = \overset{*}{y}^{i+1} P_{i+1}$, где

$$\overset{*}{y}^{i+1} = \tilde{a}^{iji_1} a_{i_1k} a_{j_1j} z_1^{k+1} y_2^{j_1+1}. \tag{51}$$

Таким образом, каждой точке $Z_1 \in L^1_{n-1}$ отвечает проективное преобразование $\overset{*}{\Pi}(Z_1)$ гиперплоскости L^1_{n-1} в себя, определенное формулами (51). Это преобразование будет преобразованием W, если

$$c^i a_{ij} z_1^{j+1} = 0.$$

Следовательно, геометрическое место точек $Z \in L^1_{n-1}$, которым соответствует проективное преобразование $\overset{*}{\Pi}(Z)$, являющееся преобразованием W, определяется системой

$$c^i a_{ij} z^{j+1} = 0, \quad z^1 + e_i z^{i+1} = 0. \tag{52}$$

Уравнения (52) определяют $(n-2)$-плоскость, принадлежащую гиперплоскости L^1_{n-1}, которую мы назовем основной $(n-2)$-плоскостью L^1_{n-2} гиперплоскости L^1_{n-1}. Из (52) следует, что основная точка $C \in L^1_{n-1}$ является полюсом $(n-2)$-плоскости L^1_{n-2} относительно квадрики (33).

Аналогичные геометрические образы можно определить, используя гиперплоскость L^2_{n-1}.

Литература.

1. Близникас В.И., Гринцевичюс К.И., О неголономной линейчатой геометрии. Третья Прибалтийская геом. конф. Тезисыд докл. Паланга, 1968, 21-25.

2. Лаптев Г.Ф., Распределения касательных элементов. Тр. геом. семинара, т.3, ВИНИТИ АН СССР, 1971, 29-48.

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. об-ва ГИТТЛ, М., 1953, 2, 275-383.

4. Ивлев Е.Т., К геометрической интерпретации свертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой научной конф. по матем. и механике за 1970г., т.1, Томск, 1970, 121-123.

5. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб., 3. Тр. Томского ун-та, 1963, 168, 28-42.