ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

А Н Д Р Е Е В Б.Л.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ И НЕКОТОРЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ ПАР ФИГУР.

Продолжается изучение локального соответствия f между точечным проективным пространством P_N и пространством $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$, где p – точка n-мерного проективного пространства P_n, а q – не инцидентная ей гиперквадрика (см. [4]). Введено понятие основной гомографии точечного соответствия, которое затем применяется к исследованию соответствия f. Даны определения характеристических направлений различных типов, получены геометрические свойства этих направлений и связанных с ними геометрических образов. Рассматривается вопрос о применении полученных результатов к изучению отображений точечных пространств в пространства индуцируемых парой F фигур. В данной работе символ $(i,j)[k]$ означает формулу (i,j) работы $[k]$.

§ I. F_2 -индикатриса.

Отображение $f: U\to R(F)$, $f(P)=(p,q)$, где $P\in U\subset P_N$ порождает точечное отображение $f_2: U\to P_n$, $f_2(P)=p$. Из (I.2) [4] получаем уравнения f_2 в неоднородных координатах в окрестности фиксированной точки P:

$$\tilde{x}^i=\Lambda^i_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}+\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}}+\langle 3\rangle, \quad (i,j,k=1,\dots,n;\ \mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L}=1,\dots,N), \tag{1.1}$$

где символ $\langle k\rangle$ означает совокупность членов k-го порядка малости относительно $\tilde{X}^{\mathcal{J}}$. Семейство касательных к f_2 коллинеаций $K(P_{\mathcal{J}})$ [3] задается уравнениями:

$$\tilde{x}^i=\frac{\Lambda^i_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}}{1-P_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}}. \tag{1.2}$$

О п р е д е л е н и е I. Точка A, не принадлежащая F_2 – нулевому подпространству [4] называется F_2 -главной, если существует касательная к f_2 коллинеация $K(P_{\mathcal{J}})$, такая, что $K(P_{\mathcal{J}})(A)\in x$ когда прямая $[PA]$ является $K(P_{\mathcal{J}})$ главной.

Из [2], §I видно, что определения и результаты, касающиеся $K(P_{\mathcal{J}})$-главных прямых, переносятся без изменений на случай отображения $P_m\to P_n$, $m>n$, если исключить из рассмотрения прямые нулевых направлений. Из (I.17) [2] получаем уравнения конуса, образованного $K(P_{\mathcal{J}})$-главными прямыми в однородных координатах:

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}=2P_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\mathcal{K}}X^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}. \tag{1.3}$$

Т е о р е м а I. На каждой $K(P_{\mathcal{J}})$-главной прямой существует единственная F_2 -главная точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование очевидно. Докажем единственность. Пусть точка $\bar{A}=X^0\bar{P}+X^{\mathcal{J}}\bar{R}_{\mathcal{J}}$ определяет направление, главное для $K(P_{\mathcal{J}})$ и $K(\hat{P}_{\mathcal{J}})$; тогда имеем:

$$\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}}=2P_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}}-2\hat{P}_{\mathcal{J}}\Lambda^i_{\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}X^{\mathcal{K}}. \tag{1.4}$$

Так как F_2 -нулевые направления исключены из рассмотрения, то есть $\Lambda^i_{\mathcal{J}}X^{\mathcal{J}}\neq 0$, из (I.2) заключаем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы точка A была F_2 -главной, является равенство:

$$P_\gamma X^\gamma = 1 . \qquad (1.5)$$

Рассмотрим на $[PA]$ точку B с неоднородными координатами $\tilde{y}^\gamma = \frac{1}{a}\tilde{X}^\gamma$ такую, что $\hat{P}_\gamma \tilde{y}^\gamma = 1$, то есть $\hat{P}_\gamma X^\gamma = a$. Из (I.4) и (I.5) получаем: $a\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma = \Lambda^i_\varkappa \tilde{X}^\varkappa$. Следовательно, $a=1$, то есть $B \equiv A$.

О п р е д е л е н и е 2. F_2-главной точкой для F_2-нулевых направлений называется точка P.

О п р е д е л е н и е 3. F_2-индикатрисой называется множество F_2-главных точек.

Т е о р е м а 2. F_2-индикатриса лежит на F_2-характеристическом конусе[4]:

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda^i_\gamma X^\gamma (X^\circ + \sigma) = 0 . \qquad (1.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $\bar{A}$ - F_2-главная. Тогда выполняется (I.3) и координаты $\bar{A}$ удовлетворяют системе (I.6) при

$$\sigma = X^\varkappa P_\varkappa - X^\circ . \qquad (1.7)$$

Т е о р е м а 3. Инвариантная направляющая F_2-характеристического конуса, определяемая системой (I.6) при $\sigma = 0$, является F_2-индикатрисой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в (I.6) и (I.7) $\sigma = 0$ получим (I.5) и (I.3). Доказательство теперь следует из теоремы I. Из теоремы 3 вытекают следующие два утверждения.

Т е о р е м а 4. F-нулевое подпространство является касательным к F_2-индикатрисе пространством в точке P.

Т е о р е м а 5. Если F_2-главная прямая стремится к F_2-нулевой, F_2-главная точка на ней стремится к точке P.

Последняя теорема оправдывает определение 2. Используя двойственность точечного пространства P_N и пространства его гиперплоскостей, получаем геометрическую характеристику инвариантной направляющей F_3-характеристического конуса [4]. Аналогичную интерпретацию имеет направляющая F_1-характеристического конуса. F_3- и F_1 -индикатрисы задаются уравнениями (3.5) [4] при $\sigma = 0$.

§ 2. Основная гомография.

Рассмотрим точечное соответствие проективных пространств q: $\hat{P}_n \to P_n$, которое в окрестности U точки $\hat{O} \in \hat{P}_n$ представляется в виде:

$$\tilde{y}^i = a^i_j \tilde{x}^j + \frac{1}{2} b^i_{jk} \tilde{x}^j \tilde{x}^k + \langle 3 \rangle, \quad (i,j,\dots = 1,\dots,n). \qquad (2.1)$$

Каждая касательная к q гомография $K(P_i)$ порождает на U инвариантную связку числовых функций:

$$\mathcal{X}(Q_i)(\tilde{x}^j) = \frac{\dfrac{\partial(\ln|I_{K(P_i)}| - \ln|I_q|)}{\partial \tilde{x}^i}\,\tilde{x}^i}{1 - Q_i \tilde{x}^i}$$

где $I_{K(P_i)}$, I_q -якобианы, соответственно, отображений $K(P_i)$ и q.

О п р е д е л е н и е 4. Касательная гомография называется основной гомографией $K(\mathring{P}_i)$, если порождаемые ею функции $\mathcal{X}(Q_i)$ принимают на U тождественно нулевые значения.

Т е о р е м а 6. Если величины Γ^k_{ij} определяют объект аффинно-евклидовой связности, индуцируемой отображением q ([2], §5), то $K(\mathring{P}_i) = K\left(\frac{1}{n+1}\Gamma_i\right)$, где $\Gamma_i = \Gamma^j_{ij}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для объекта связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, индуцируемой гомографией $K(P_i)$, имеем: $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \delta^k_i P_j + \delta^k_j P_i$, откуда $\tilde{\Gamma}_i = (n+1) P_i$. Из (5.7).[2] и определения 4 получаем: $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i$, откуда $\mathring{P}_i = \frac{1}{n+1}\cdot \Gamma_i$.

Применим введенное понятие к изучению отображения f. Пусть $f_{2/2}$-сужение f_2 на F_2- подпространство [4]. Отображение $f_{2|2}$ биективно в некоторой области ϑ F_2-подпространства, а именно, в точках, где последнее остается трансверсальным к F_2-нулевым подпространствам, найденным для этих точек. Основную гомографию для $f_{2|2}$ обозначим $\overset{\circ}{f}_{2|2}$.

Т е о р е м а 7. Гомография $\overset{\circ}{f}_{2|2}$ задается уравнениями:

$$\tilde{x}^i=\frac{\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma}{1-\frac{1}{n+1}\overset{2}{\Gamma}_\varkappa \tilde{X}^\varkappa}, \qquad \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma = X^\varkappa, \tag{2.3}$$

где

$$\overset{2}{\Gamma}_\gamma=\overset{2}{\Gamma}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} . \qquad ([4],(3.6)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что система (2.3) задает инвариантную гомографию. Точка $\bar{A}=X^0\bar{P}+X^\gamma\bar{R}_\gamma$ лежащая, в силу (2.3) в F_2-подпространстве, отображается в точку $\bar{a}=(X^0-\frac{1}{n+1}\overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma)\bar{p}+\Lambda^i_\gamma X^\gamma \bar{e}_i$. Если $\bar{A}$ стационарна, то $\delta\bar{a}=(\theta-\Pi^0_0)\bar{a}$, где θ -полный дифференциал. Поместим первые n вершин репера R в F_2-подпространство. Уравнения (2.3) принимают вид:

$$\tilde{x}^i=\frac{\Lambda^i_\gamma X^\gamma}{1-\frac{1}{n+1}\overset{2}{\Gamma}_j \tilde{X}^j}, \qquad x^\alpha=0 \ ; \ (\alpha=n+1,\dots,N) \tag{2.3'}$$

Из (2.9) [4] следует, что тогда $V^\alpha_i=0$, откуда, используя (2.6)[4], (2.1) можно убедиться, что $\Gamma_i=\Gamma^j_{ij}$ и что Γ^κ_{ij} удовлетворяют уравнениям (5.2)[2], определяя объект аффинно-евклидовой связности, присоединенной к $f_{2|2}$. Доказательство теперь следует из теоремы 6.

Объект $\{\overset{2}{\Gamma}_\gamma, \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma\}$ определяет в P_N инвариантную $(n-1)$-плоскость:

$$\overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma-(n+1)X^0=0, \quad \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma=X^\varkappa, \tag{2.4}$$

лежащую в F_2-подпространстве. Она называется F_2-абсолютом.

Т е о р е м а 8. F_2-абсолют является прообразом гиперплоскости π при гомографии $\overset{\circ}{f}_{2|2}$.

Доказательство следует из предыдущей теоремы.

Система уравнений:

$$\overset{2}{\Pi}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa=0, \quad \overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma=X^\varkappa, \tag{2.5}$$

где $\overset{2}{\Pi}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa}$ являются компонентами введенного в [4] объекта F_2-связности, имеет нетривиальное решение лишь в специальных случаях.

Т е о р е м а 9. Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы F_2-абсолют имел непустое пересечение с F_2-индикатрисой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанное условие означает совместность системы:

$$\overset{2}{I}{}^\varkappa_\gamma X^\gamma=X^\varkappa, \quad \overset{2}{\Gamma}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa-2X^\varkappa X^0, \quad \overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma-2X^0(n+1)=0; \tag{2.6}$$

(см.(3.12)[4]). Используя (3.8)[4], приводим второе из уравнений (2.6) к виду:

$$\overset{2}{\Pi}{}^\varkappa_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa+\frac{2}{n+1}X^\varkappa\overset{2}{\Gamma}_\gamma X^\gamma-2X^\varkappa X^0=0,$$

после чего доказательство становится очевидным.

§3. $F_{2,1}$-характеристические направления.

О п р е д е л е н и е 5. Слабо $F_{2,1}$-характеристическими направлениями называются направления, являющиеся одновременно F_2- и F_1-характеристическими. Конус, образованный прямыми связки $\{P\}$ имеющими такие направления, называется слабо $F_{2,1}$-характеристическим конусом. Из (3.I),(3.5) [4] получаем его уравнения:

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda^i_\gamma X^\gamma (X^0 + \sigma) = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda_{i\gamma} X^\gamma (X^0 + \rho) = 0. \tag{3.2}$$

Таким образом, в общем случае существует $(N-2n+1)$ -параметрическое семейство слабо $F_{2,3}$-характеристических направлений. В отличие от F_2 и F_3 -характеристических конусов, конус (3.I), (3.2) имеет целый пучок инвариантных направляющих. Они задаются уравнениями (3.I),(3.2) при $\rho = k\sigma$, $k = Const \neq 1$. Две из них : $\rho = 0$ $(k=0)$ и $\sigma = 0$ $(k=\infty)$ являются пересечениями конуса (3.I),(3.2) с, соответственно, F_3- и F_2-индикатрисами. Геометрический смысл остальных направляющих пучка $\rho = k\sigma$ становится ясным из следующей теоремы.

Т е о р е м а 10. Пусть точка $\bar{A} = (X^0, X^\gamma)$ лежит на направляющей, задаваемой системой (3.I),(3.2) при $\rho = k\sigma$. Тогда $k = (B, C; P, A)$, где B и C -точки пересечения прямой $[PA]$ с F_2- и F_3-индикатрисами, соответственно.

Введенное понятие слабо $F_{2,3}$-характеристических направлений является одним из обобщений понятия характеристических направлений точечного отображения $h : P_N \to P_{2n}$ на случай, когда вместо точечного пространства P_{2n} берется пространство пар фигур (здесь это нуль-пара (ρ, π)). Соответствующее отображение $f_{2,3}$: $P_N \to R(\rho, \pi)$ порождается отображением f и задается подсистемой: $\omega^i_0 = \Lambda^i_\gamma \Omega^\gamma_0$, $\omega^0_i - \Lambda_{i\gamma}\Omega^\gamma_0$ системы дифференциальных уравнений (I.2)[4]. Заметим, однако, что размерность конуса (3.I), (3.2) в общем случае на единицу больше размерности характеристического конуса отображения h [3]. В этом смысле более точным аналогом характеристических направлений отображения h будет

другое их обобщение.

О п р е д е л е н и е 6. $F_{2,3}$-характеристическими направлениями называются направления, задаваемые уравнениями (3.I),(3.2) при $\rho = \sigma$ $(k=1)$.

Совокупность $F_{2,3}$-характеристических направлений зависит в общем случае от $N-2n$ параметров. Очевидно, любое $F_{2,3}$-характеристическое направление является слабо $F_{2,3}$-характеристическим. Направляющей $F_{2,3}$- характеристического конуса является множество общих точек пучка направляющих $\rho = k\sigma$, $k \neq 1$ слабо $F_{2,3}$-характеристического конуса. Она называется $F_{2,3}$-индикатрисой и в общем случае представляет собой алгебраическое многообразие порядка 2^{2n}, являясь пересечением F_2- и F_3- индикатрис.

Т е о р е м а 11. Направления, лежащие в F_1-подпространстве, являются $F_{2,3}$-характеристическими.

Это нулевые направления отображения $f_{2,3}$. Выясним геометрический смысл $F_{2,3}$-характеристических направлений. Из (3.I),(3.2) при $\rho = \sigma$ получаем для каждого i :

$$\frac{\Lambda^i_{\gamma\varkappa} \widetilde{X}^\gamma \widetilde{X}^\varkappa}{\Lambda^i_\varkappa \widetilde{X}^\varkappa} = \frac{\Lambda_{i\gamma\varkappa} \widetilde{X}^\gamma \widetilde{X}^\varkappa}{\Lambda_{i\varkappa} \widetilde{X}^\varkappa} = \mu, \tag{3.3}$$

где μ -величина первого порядка малости относительно $\widetilde{X}^\gamma$. Аналогично (I.I), разложение отображения $f_3 : P_N \to R(\pi)$ имеет вид:

$$\widetilde{\xi}_i = -\Lambda_{i\gamma} \widetilde{X}^\gamma - \Lambda_{i\gamma\varkappa} \widetilde{X}^\gamma \widetilde{X}^\varkappa + \langle 3 \rangle. \tag{3.4}$$

Обозначив $\underset{(1)}{\widetilde{x}^i}, \underset{(2)}{\widetilde{x}^i}, \underset{(1)}{\widetilde{\xi}_i}, \underset{(2)}{\widetilde{\xi}_i}$ координаты $\widetilde{x}^i$ и $\widetilde{\xi}_i$, взятые с точностью до соответствующих порядков малости, получаем в силу (3.3) :

$$\underset{(2)}{\widetilde{x}^i} = \Lambda^i_\gamma \widetilde{X}^\gamma (1 + \tfrac{1}{2}\mu), \quad \underset{(2)}{\widetilde{\xi}_i} = -\Lambda_{i\gamma} \widetilde{X}^\gamma (1 + \tfrac{1}{2}\mu), \tag{3.5}$$

откуда:

$$\frac{\underset{(2)}{\tilde{x}^i} - \underset{(1)}{\tilde{x}^i}}{\underset{(1)}{\tilde{x}^i}} = \frac{\underset{(2)}{\tilde{\xi}_i} - \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}}{\underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}} . \tag{3.6}$$

Для направлений, не являющихся $F_{2,3}$-характеристическими, равенства (3.3) и (3.6) не выполняются. Слабая $F_{2,3}$-характеристичность обеспечивает лишь равенство **левых** частей соотношений (3.6) между собой, а также правых. Введем точки и гиперплоскости с координатами:

$$\bar{P}_1 = (1, \underset{(1)}{\tilde{x}^i}), \quad \bar{P}_2 = (1, \underset{(2)}{\tilde{x}^i}); \quad \bar{\pi}_1 = \{1, \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}\},$$

$$\bar{\pi}_2 = \{1, \underset{(2)}{\tilde{\xi}_i}\}, \quad \bar{P}_\infty = (0, \underset{(1)}{\tilde{x}^i}), \quad \bar{\pi}_\infty = \{0, \underset{(1)}{\tilde{\xi}_i}\}.$$

соответствующие точке $\bar{P}^* = (1, \tilde{X}^\gamma)$.

Т е о р е м а I2. Пусть точка $\bar{P}^*$ стремится к $\bar{P}$ вдоль слабо $F_{2,3}$-характеристической прямой. Для того, чтобы эта прямая была $F_{2,3}$-характеристической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$(P_2, P; P_1, P_\infty) = (\pi_2, \pi; \pi_1, \pi_\infty). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы непосредственно следует из (3.6).

З а м е ч а н и е. I. Теорема справедлива и в случае, если P^* стремится к P по кривой, имеющей касание 2-го порядка с указанной прямой.

З а м е ч а н и е 2. При доказательстве оказался исключенным случай F_2 (F_3)-нулевых направлений.

Выберем в P_n невырожденную гиперквадрику β:

$$b_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0 \tag{3.8}$$

такую, чтобы гиперплоскость π являлась полярой точки P относительно β, но пересечение $\pi \cap \pi_1$ не являлось полярой прямой $[P, P_1]$. В 2-плоскости B, определяемой прямой $[P, P_1]$ и полярой пересечения: $\pi \cap \pi_1$

рассмотрим пересечение гиперплоскости $\pi^* = f_3(P^*)$, поляры точки $P^* = f_2(P^*)$ относительно β, и 2-плоскости B. По построению, это пересечение является точкой. Так построенная точка A^* называется β-образом точки P^*: $A^* = \beta(P^*)$. В условиях замечания 2 справедлива:

Т е о р е м а I3. Чтобы касательная к β-образу слабо $F_{2,3}$-характеристической прямой $[PP^*]$ в точке $A^* = \beta(P^*)$ была инцидентна точке P, необходимо и достаточно, чтобы $[PP^*]$ была $F_{2,3}$-характеристической прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $[PP^*]$-слабо $F_{2,3}$-характеристическая прямая, (3.5) можно записать в виде:

$$\tilde{x}^i = l^i (t + \tfrac{1}{2} \mu t^2) + \langle 3 \rangle, \quad \tilde{\xi}_i = \lambda_i (t + \tfrac{1}{2} \nu t^2) + \langle 3 \rangle, \tag{3.9}$$

где за t можно взять любую из $\tilde{X}^\gamma$, не равную нулю, причем $\mu = \nu$ только для $F_{2,3}$-характеристических прямых. Тогда

$$A^* = \left(at,\ b^i (1 + \tfrac{1}{2} \nu t) + c^i (1 + \tfrac{1}{2} \mu t)\right),$$

где

$$a = b_{ij} l^i l^j b^{kl} \lambda_k \lambda_l - (\lambda_i l^i)^2, \quad b^i = \lambda_j (l^j b^{ip} \lambda_p - b^{jp} \lambda_p l^i),$$

$$c^i = b_{jp} l^p (l^j b^{iq} \lambda_q - b^{jq} \lambda_q l^i),$$

$b^{ij} b_{jk} = \delta^i_k$, причем $b^i \neq k c^i$, $b^i \neq 0$, $c^i \neq 0$, $a \neq 0$ по построению. Обозначив: $\bar{Q} = (0, b^i + c^i)$, $\bar{R} = (0, c^i)$, получаем:

$$\bar{A}^* = at\bar{P} + (1 + \tfrac{1}{2} \nu t)\bar{Q} + \tfrac{1}{2}(\mu - \nu) t \bar{R}, \tag{3.10}$$

откуда легко следует утверждение теоремы.

Каждой прямой $\mathcal{L} \in \{P\}$,точки котор й имеют координаты X^γ объектом первого порядка отображения f ставятся в соответствие прямая ℓ (с координатами точек $x^i = \Lambda^i_\gamma X^\gamma$) и пучок гиперплоскостей λ ($\xi_i = -\Lambda_{i\gamma} X^\gamma$).Каждое касательное к $f_{2,3}$ отображение $K_{2,3}(P_\gamma, \hat{P}_\gamma) = (K_2(P_\gamma), K_3(\hat{P}_\gamma))$, действующее по формулам:

$$K_2(P_\gamma):\ \tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma}{1 - P_\gamma \tilde{X}^\gamma}, \qquad K_3(\hat{P}_\gamma):\ \tilde{\xi}_i = \frac{-\Lambda_{i\gamma} \tilde{X}^\gamma}{1 - \hat{P}_\gamma \tilde{X}^\gamma} \tag{3.11}$$

задает соответствия между точками прямых $\mathcal{L}$ и ℓ и между точками $\mathcal{L}$ и гиперплоскостями пучка λ .Тем самым задается множество проек ивных соответствий $\varkappa_{\mathcal{L}}(P_\gamma, \hat{P}_\gamma)$ между элементами ℓ и λ .

Т е о р е м а 14.Существует корреляция $\varkappa_{\mathcal{L}}: \ell \to \lambda$,не зависящая от выбора P_γ, $\hat{P}_\gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим совокупность "согласованных" отображений (3.11): $P_\gamma = \hat{P}_\gamma$. Их геометрический смысл очевиден:

$$K_2^{-1}(P_\gamma)(\pi) = K_3^{-1}(P_\gamma)(p). \tag{3.12}$$

Найдем точки $m \in \ell$,такие,что $m \in \mu = \varkappa_{\mathcal{L}}(P_\gamma)(m)$.
Легко показать,что

$$\bar{m} = (\pm\sqrt{\Lambda_{i\gamma}\Lambda^i_\varkappa X^\gamma X^\varkappa},\ \Lambda^i_\gamma X^\gamma),\ \delta\bar{m} = (\pi^\circ_\circ - \Pi^\circ_\circ + \theta)\bar{m} \tag{3.13}$$

при любых P_γ .Таким образом,есть 3 точки на прямой ℓ: p, $\ell \cap \pi$ и одна из m (другая составляет с этими тремя гармоническую четверку),образы которых в пучке λ не зависит от P_γ .Ими проективное ото ражение $\varkappa_{\mathcal{L}}$ определяются полностью и, следовательно, не зависит от P_γ .Назовем $\varkappa_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L}$-канонической корреляцией.

З а м е ч а н и е 3. Доказательство проводилось в условиях

замечания 2 и,кроме того,предполагалось $\Lambda_{i\gamma}\Lambda^i_\varkappa X^\gamma X^\varkappa \neq 0$.
Исключим эти особые направления и при доказательстве следующей теоремы.

Т е о р е м а 16. Чтобы прямая $\mathcal{L}$ была $F_{2,3}$-характеристическая,необходимо и достаточно,чтобы с точностью до 2-го порядка малости выполнялось:

$$\varkappa \cdot f_2 = f_3 \tag{3.14}$$

для любой корреляции $\varkappa$,сужение которой на $K_2(P_\gamma)(\mathcal{L})$ совпадает с $\varkappa_{\mathcal{L}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varkappa_{\mathcal{L}} = K_3(P_\gamma)\cdot(K_2(P_\gamma)|_{\mathcal{L}})^{-1}$, где $K_2(P_\gamma)|_{\mathcal{L}}$-сужение $K_2(P_\gamma)$ на $\mathcal{L}$,то $\varkappa_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет (3.14) с точностью до 1-го порядка малости,то есть $\varkappa_{\mathcal{L}}(p_1) = \pi_1$.Пусть $\mathcal{L}$-слабо $F_{2,3}$-характеристическая прямая,следовательно, $p_2 \in \ell$, $\pi_2 \in \lambda$.Тогда $\varkappa_{\mathcal{L}}(p_2) = \pi_2$ выполняется в том и только в том случае,когда справедливо (3.7).Если же $\mathcal{L}$ не является слабо $F_{2,3}$-характеристической прямой,то $f_2(\mathcal{L})$ имеет с ℓ только касание первого порядка ,и достаточно взять такую $\varkappa$,чтобы $\varkappa \cdot f_2(\mathcal{L})$ не имело с $f_3(\mathcal{L})$ касания второго порядка и (3.14) не выполняется.

§4. Соответствия между P_N и пространствами фигур,индуцируемых парой (p, q)

Геометрия введенного в §3 отображения $f_{2,3}$ из P_N в пространство нуль-пар $R(p,\pi)$ полностью охватывается геометрией отображения f .Но $f_{2,3}$ не является биективным.Однако если положить всюду $N = 2n = \dim R(p,\pi)$, а компоненты объектов $\Gamma_\circ$, $\overset{(1)}{\Gamma_1}$ и его продолжений [4] считать равными нулю,то получим теорию взаимно-однозначных соответствий f между точечным пространством P_{2N} и пространством нуль-пар.Совокупность слабо характеристических направлений такого соответствия, как следует из (3.1), (3.2) образует в общем случае 1-параметрическое семейство. Множество характеристических прямых $\rho = \sigma$ состоит как и для точечных соответствий в общем случае из 2^N прямых. Образы 2-й дифференциальной окрестности соответствия j, построенные для фиксированной точки P, повторяют собой то, что получается при пересечении соответствующих образов отображения f и $F_{2,3}$-подпространства.

Кроме геометрии биективных отображений в пространство нуль-пар, теория отображения f аналогичным образом включает в себя теорию соответствий между P_N и пространствами других фигур, индуцируемых парой (p,q): гиперквадрик q, гиперконусов C, квадратичных элементов $\bar{q}$ и пар: $(C,\varkappa)$ и $(\bar{q},p)$. Для получения последовательностей геометрических объектов, определяющих эти соответствия, нужно выделить систему главных форм соответствующей индуцированной фигуры, что всегда можно сделать (см. [1] стр. 190), и положить равными нулю компоненты геометрических объектов, входящих в дифференциальные уравнения отображения f, включающие оставшиеся главные формы. N при этом предполагается равным рангу индуцированной фигуры.

Литература.

1. В.С. Малаховский, Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. (Труды геом. семинара, т.2, 1969, ВИНИТИ, с. 179-206.

2. В.В. Рыжков, Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами. Геометрия, 1963 (Итоги науки ВИНИТИ), М, 1965, 55-107.

3. В.В. Рыжков, Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. Труды геом. семинара, т.3, 1971, ВИНИТИ, 135-242.

4. Б.А. Андреев, О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 2 (Тр. Калининградского ун-та) 1970, 28-37.