ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Г.Л.Свешникова

О КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется конгруэнция (двупараметрическое семейство) F кривых второго порядка (коник) с двумя вырождающимися фокальными поверхностями [1], для которой задано касательное распределение. Такая конгруэнция называется касательно оснащенной конгруэнцией коник [2], [3] с вырождающимися фокальными поверхностями, или конгруэнцией F^*. Построен канонический репер конгруэнции F^*, рассмотрены основные геометрические образы. Изучен подкласс с двусторонним расслоением прямолинейных конгруэнций [4], ассоциированных с конгруэнцией F^*.

§1. Построение репера конгруэнции F^*

Определение. Конгруэнцией F называется конгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: 1/ существуют две фокальные поверхности (S_i) конгруэнции коник ($i,j,k=1,2;\ i\neq j$), вырождающиеся в линии; 2/ касательные ℓ_i к линиям (S_i) в точках S_i не инцидентны плоскости коники.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{1.3}$$

Поместим вершину A_i репера R в фокальную точку S_i коники, описывающую линию (S_i), вершину A_3 – в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, а A_4 – на прямую ℓ, проходящую через точку A_3 и пересекающую прямые ℓ_i.

Уравнения коники относительно репера R записываются в виде

$$(x^3)^2-2p\,x^1x^2=0,\quad x^4=0,\quad p\neq 0. \tag{1.4}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции F:

$$\begin{gathered}\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3-d\ln p=a^k\omega_k,\end{gathered} \tag{1.5}$$

причем

$$\Gamma_i^{3i}\Gamma_3^{jj}+\Gamma_4^{jj}=0. \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем по индексам i и j суммирование не производится, $\omega_i=\omega_i^4$, $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$.

Зададим величину λ, удовлетворяющую уравнению

$$d\lambda+\lambda(\omega_1^1-\omega_2^2)+(\Gamma_3^{41}-\lambda\Gamma_3^{42})(\lambda\omega_1^3+\omega_2^3)=m^k\omega_k. \tag{1.7}$$

Геометрический объект

$$\Gamma=\{\rho,\Gamma_i^{3i},\Gamma_3^{ik},\Gamma_3^{4i},\Gamma_4^{ik},a^i,\lambda\} \tag{1.8}$$

является касательно оснащающим объектом конгруэнции F [1]. Такую конгруэнцию F назовем касательно оснащенной конгруэнцией коник с вырождающимися фокальными поверхностями или конгруэнцией F^*. Относительно инвариантная форма

$$\theta_1\equiv\lambda\omega_1+\omega_2 \tag{1.9}$$

называется оснащающей формой Пфаффа [1].

Осуществим следующую фиксацию вторичных параметров конгруэнции:

$$\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}=0,\quad \rho=1 \tag{1.10}$$

и приведем величину λ к единице. Тогда вершина A_4 репера R совместится с четвертой гармонической к точке A_3 относительно точек B_i

$$B_i=\Gamma_i^{3i}A_3+A_4, \tag{1.11}$$

являющихся точками пересечения прямых ℓ_i с прямой ℓ. Репер геометрически фиксирован.

Обозначим

$$\omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k .$$

Тогда система уравнений Пфаффа для конгруэнции F запишется в виде

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^j\Gamma_1^{31}\omega_i,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,$$

$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \tag{1.12}$$

$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k,\quad \omega_1^1-\omega_2^2+(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})(\omega_1^3+\omega_2^3)=m^k\omega_k,$$

где

$$\Gamma_4^{ii}+(-1)^i\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{ii}=0,$$

$$d\Gamma_1^{31}+\Gamma_1^{31}(\omega_3^3-\omega_4^4)+(\Gamma_1^{31})^2(\Gamma_3^{41}\omega_1-\Gamma_3^{42}\omega_2)-\Gamma_4^{31}\omega_1+\Gamma_4^{32}\omega_2=0. \tag{1.13}$$

§ 2. Геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F^*

Рассмотрим некоторые ассоциированные с конгруэнцией F^* геометрические образы.

Оснащающая прямая

$$x^1-x^2+\mu x^3=0,\quad x^4=0,\quad \mu=\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42} \tag{2.1}$$

является характеристикой плоскости коники (1.4) вдоль ассоциированного однопараметрического семейства

$$\theta_1=0 .$$

Поляра характеристической точки (2.2)

$$M=A_3-\Gamma_3^{41}A_1-\Gamma_3^{42}A_2$$

плоскости коники (1.4)

$$\Gamma_3^{42}x^1+\Gamma_3^{41}x^2+x^3=0,\quad x^4=0 \tag{2.3}$$

относительно коники (1.4).

Оснащающая точка

$$M_1=-(1+\mu\Gamma_3^{41})A_1+(\mu\Gamma_3^{42}-1)A_2+(\Gamma_3^{41}+\Gamma_3^{42})A_3 \tag{2.4}$$

является точкой пересечения поляры (2.3) с оснащающей прямой (2.I). Сопряженно оснащающая точка

$$M_2=A_1-A_2+\mu A_3 \tag{2.5}$$

-точка поляры (2.3), полярно сопряженная оснащающей точке M_1 относительно коники (1.4).

Индуцированная прямая

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{2.6}$$

где

$$c_1 = \Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21}, \quad c_2 = \Gamma_3^{11} - \Gamma_3^{12}, \quad c_3 = c_1 \Gamma_3^{41} + c_2 \Gamma_3^{42},$$

-касательная на поверхности (M) вдоль ассоциированного однопараметрического семейства $\Theta_1 = 0$.

Индуцированная точка

$$N_1 = (c_2 - c_3 \Gamma_3^{41}) A_1 + (c_3 \Gamma_3^{42} - c_1) A_2 + (c_1 \Gamma_3^{41} - c_2 \Gamma_3^{42}) A_3 \tag{2.7}$$

-точка пересечения поляры (2.3) с индуцированной прямой (2.6). Сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = c_2 A_1 + c_1 A_2 - c_3 A_3 \tag{2.8}$$

- точка поляры (2.3), полярно сопряженная индуцированной точке N_1 относительно коники (1.4).

Сопряженно оснащающая прямая

$$(1 - \mu \Gamma_3^{42}) x^1 + (1 + \mu \Gamma_3^{41}) x^2 + (\Gamma_3^{41} + \Gamma_3^{42}) x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{2.9}$$

-касательная MM_2 на поверхности (M).

Сопряженно индуцированная прямая

$$(c_1 - c_3 \Gamma_3^{42}) x^1 + (c_3 \Gamma_3^{41} - c_2) x^2 + (c_1 \Gamma_3^{41} - c_2 \Gamma_3^{42}) x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{2.10}$$

-касательная MN_2 на поверхности (M).

Сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \lambda^* \omega_2, \tag{2.11}$$

где

$$\lambda^* = \frac{(1 - \mu \Gamma_3^{42}) \Gamma_3^{12} + (1 + \mu \Gamma_3^{41}) \Gamma_3^{11}}{(1 - \mu \Gamma_3^{42}) \Gamma_3^{22} + (1 + \mu \Gamma_3^{41}) \Gamma_3^{21}}.$$

§3. Конгруэнции F_o^*

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией F_o^* называется конгруэнция F^*, обладающая следующими свойствами: 1/ точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники; 2/ касательная плоскость к поверхности (M_1) инцидентна прямой A_3A_4; 3/ существует расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_iA_3) к прямолинейной конгруэнции (A_jA_4).

Т е о р е м а. Конгруэнция F_o^* существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка A_3 будет характеристической точкой плоскости коники, если имеют место соотношения $\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = 0$, т.е.

$$\omega_3^4 = 0. \tag{3.1}$$

Касательная плоскость к поверхности (M_1) инцидентна прямой A_3A_4 при условии

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 0. \tag{3.2}$$

При внешнем дифференцировании уравнений Пфаффа (3.1), (3.2) получаем конечное соотношение

$$\Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{21} = 0 \tag{3.3}$$

и квадратичное уравнение

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 = 0. \tag{3.4}$$

6. Зак. 10461.

Одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A_i A_3)$ к прямолинейной конгруэнции $(A_j A_4)$ существует, если имеют место квадратичные уравнения

$$\omega_3^j \wedge \omega_j^i + \omega_3^4 \wedge \omega_4^i = 0, \quad \omega_i^j \wedge \omega_j^3 + \omega_i \wedge \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_i^j \wedge \omega_j^i + \omega_i \wedge \omega_4^i - \omega_3^j \wedge \omega_j^3 - \omega_3^4 \wedge \omega_4^3 = 0. \quad (3.5)$$

Эти уравнения в силу пфаффовых уравнений (1.12),(3.1) преобразуются к виду

$$\omega_i \wedge \omega_4^3 = 0, \quad (3.6)$$

$$\omega_i \wedge \omega_4^i - \omega_3^j \wedge \omega_j^3 = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.6) получаем уравнение Пфаффа

$$\omega_4^3 = 0, \quad (3.8)$$

замыканием которого является квадратичное уравнение

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0. \quad (3.9)$$

Квадратичное уравнение (3.4) тождественно удовлетворяется в силу уравнений (3.7),(3.9). Получаем конечные соотношения

$$\Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21}) = 0, \ \Gamma_4^{12} + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{21} = 0, \ \Gamma_4^{21} - \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} = 0. \quad (3.10)$$

Если $\Gamma_1^{31} = 0$, то из уравнений (3.10),(1.6) следует, что

$$\Gamma_4^{11} = \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21} = \Gamma_4^{22} = 0. \quad (3.11)$$

Прямая $A_2 A_4$ становится неподвижной. Этого быть не может, поскольку по условию многообразие прямых $(A_2 A_4)$ является прямолинейной конгруэнцией.

Значит,

$$\Gamma_1^{31} \neq 0, \quad (3.12)$$

тогда получаем равенство

$$\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0. \quad (3.13)$$

При внешнем дифференцировании уравнения (1.13) получаем

$$\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} = 0. \quad (3.14)$$

Из соотношений (3.13),(3.14) следует, что

$$\Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21} = 0. \quad (3.15)$$

Тогда из (3.10) получим

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = 0. \quad (3.16)$$

Так как $\Gamma_1^{31} \neq 0$, можно так пронормировать вершины репера, чтобы

$$\Gamma_1^{31} = 1. \quad (3.17)$$

Обозначим

$$\Gamma_3^{11} = b, \ \Gamma_3^{22} = c. \quad (3.18)$$

Система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнцию F_o^*, принимает вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^j \omega_i, \ \omega_3^1 = b\omega_1, \ \omega_3^2 = c\omega_2,$$
$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^1 - \omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2 + \omega_3^2 = 0, \quad (3.19)$$
$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^3 - \omega_4^4 = 0, \quad 2(\omega_1^1 - \omega_3^3) = a^k \omega_k.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.19) и анализируя полученную замкнутую систему, убеждаемся, что она в инволюции и имеет решение с произволом одной функции двух аргументов.

Матрица компонент канонического репера конгруэнции F_0^* имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}a^k\omega_k & 0 & \omega_1 & \omega_1 \\ 0 & \frac{1}{4}a^k\omega^k & -\omega_2 & \omega_2 \\ b\omega_1 & c\omega_2 & -\frac{1}{4}a^k\omega_k & 0 \\ b\omega_1 & -c\omega_2 & 0 & -\frac{1}{4}a^k\omega_k \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

Ассоциированные геометрические образы (2.1)-(2.11) для конгруэнции F_0^* имеют следующий вид:

оснащающая прямая

$$x^1 - x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.21)$$

оснащающая точка

$$M_1 = A_1 + A_2; \qquad (3.22)$$

сопряженно оснащающая точка

$$M_2 = A_1 - A_2; \qquad (3.23)$$

индуцированная прямая

$$cx^1 + bx^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.24)$$

индуцированная точка

$$N_1 = bA_1 - cA_2; \qquad (3.25)$$

сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = bA_1 + cA_2; \qquad (3.26)$$

сопряженно оснащающая прямая

$$x^1 + x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.27)$$

сопряженно индуцированная прямая

$$cx^1 - bx^2 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (3.28)$$

оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_1 = \omega_1 + \omega_2; \qquad (3.29)$$

сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \frac{b}{c}\omega_2 . \qquad (3.30)$$

Т е о р е м а. Конгруэнции F_0^* обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ существует расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_jA_4) к прямолинейной конгруэнции (A_iA_3); 2/ существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4); 3/ касательная плоскость к поверхности (A_4) содержит прямую A_1A_2; 4/ фокальные поверхности прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) вырождаются в прямые, инцидентные фокальным точкам коники A_i; 5/ координатные линии на поверхностях (A_3), (A_4), (M_1), (M_2) сопряжены; 6/ плоскость $(A_iA_3A_4)$ стационарна вдоль направления $\omega_j = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/, 2/ Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_jA_4) к прямолинейной конгруэнции (A_iA_3)

$$\omega_4^i \wedge \omega_i^j + \omega_4^3 \wedge \omega_3^j = 0, \quad \omega_j^i \wedge \omega_i + \omega_j^3 \wedge \omega_3^4 = 0,$$

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_3^4 \wedge \omega_4^3 = 0,$$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_4^2 \wedge \omega_2 - \omega_4^3 \wedge \omega_3^4 = 0$$

и условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4)

$$\omega_i^3\wedge\omega_3^j+\omega_i\wedge\omega_4^j=0,\quad \omega_i\wedge\omega_4^i-\omega_j^3\wedge\omega_3^j=0,$$

$$\omega_4^1\wedge\omega_1^3+\omega_4^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_3^1\wedge\omega_1+\omega_3^2\wedge\omega_2=0$$

в силу матрицы (3.20) тождественно удовлетворяются.

3/Из матрицы (3.20) видно,что прямая A_1A_2 инцидентна плоскости,касательной к поверхности (A_4).

4/Фокальными точками луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) являются точки

$$P_1=A_3+A_4,\quad P_1^*=A_3-A_4.$$

Поверхности (P_1) и (P_1^*) вырождаются в прямые A_1P_1, $A_2P_1^*$.

5/Асимптотические линии на поверхностях $(A_3),(A_4),(M_1),(M_2)$ соответствуют,их уравнение

$$b(\omega_1)^2+c(\omega_2)^2=0.$$

§4. Конгруэнции F_1^*

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией F_1^* называется конгруэнция F_c^*, у которой индуцированная точка совпадает с оснащающей.

Индуцированная точка N_1 совместится с оснащающей точкой M_1 при условии

$$b=-c. \tag{4.1}$$

Учитывая в уравнениях (3.19) соотношение (4.1),получим следующую систему уравнений,определяющую конгруэнцию F_1^*:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^j\omega_i,\quad \omega_3^i=(-1)^j b\,\omega_i,\quad \omega_3^4=\omega_4^3=0,$$

$$\omega_4^i=(-1)^j\omega_3^i,\quad \omega_1^1=\omega_2^2=\frac{1}{4}a^k\omega_k,\quad \omega_3^3-\omega_4^4=0, \tag{4.2}$$

$$db+b(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)=0,$$

$$da^1\wedge\omega_1+da^2\wedge\omega_2=0. \tag{4.3}$$

Замкнутая система уравнений (4.2),(4.3) определяет конгруэнции F_1^* с произволом одной функции двух аргументов.

Для огибающей поверхности (A_3) семейства плоскостей коник получено каноническое представление, соприкасающиеся квадрики (поверхности второго порядка).Уравнение поверхности (A_3) в локальных неоднородных координатах имеет вид:

$$2bz=x^2-y^2+\frac{1}{2b}\,xy(a^2x+a^1y)+[4], \tag{4.4}$$

где $[4]$ означает члены порядка малости не ниже 4.Трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик поверхности (A_3) в неоднородных координатах записывается в виде:

$$2(a_{14}x+a_{24}y)z+x^2-y^2-2bz+a_{44}z^2=0. \tag{4.5}$$

Из этого семейства квадрик выделена квадрика Ли.Её уравнение в однородных координатах

$$(x^1)^2-(x^2)^2-2bx^3x^4=0. \tag{4.6}$$

Дифференцируя уравнение (4.6) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+\theta x^\alpha,$$

убеждаемся, что квадрика (4.6) инвариантна.

Из уравнения квадрики Ли видно, что точки A_3, A_4 лежат на этой квадрике, точки A_1 и A_2, A_i и A_4, A_i и A_3 сопряжены относительно квадрики. В сечении квадрики Ли (4.6) плоскостями $x^1=0$ и $x^2=0$ получаются коники C_1 и C_2, уравнения которых, соответственно, имеют вид

$$(x^2)^2-2b\,x^3x^4=0, \quad x^1=0, \tag{4.7}$$

$$(x^1)^2-2b\,x^3x^4=0, \quad x^2=0. \tag{4.8}$$

Список литературы

1. Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.1 Калининград, 1970, с.71-78

2. Малаховский В.С. К геометрии касательно оснащенных многообразий.-"Известия вузов. Сер. Математика", 1972, №9(124), с.54-65.

3. Малаховский В.С. Касательно оснащенные конгруэнции коник.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.4. Калининград, 1974, с.68-86.

4. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956, 457 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
1975 Вып.6

Е.В. Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР КОНИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$ пар коник C_1 и C_2 [1]. 1. Каждой конике C_1 конгруэнции (C_1) соответствует единственная коника C_2 однопараметрического семейства (C_2), полным прообразом которой является однопараметрическое семейство $(C_1)_{C_2}$ коник C_1. Найдены условия принадлежности всех коник C_1 семейства $(C_1)_{C_2}$ и всех коник C_2 семейства (C_2) стационарным квадрикам. Исследованы частные классы вырожденных конгруэнций $(C_1C_2)_{2,1}$, в которых все коники C_1 и C_2 принадлежат одной стационарной квадрике Q. Невырожденные конгруэнции пар коник рассматривались В.С. Малаховским [2].

§1. Репер вырожденной конгруэнции $(C_1C_2)_{2,1}$

Отнесем пространство P_3 к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$ деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta. \tag{1.1}$$

Формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\,\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности