R_1 формула (3) перепишется так:

$$\int_M \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i, e'_j, e'_i, e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 + 2\,\| Pr_{S^2_0 M} \nabla\varphi \|^2 \Big\} dv = 0. \qquad (4)$$

На основании новой формулы (4) заключаем, что на компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) положительной секционной кривизны класс R_1 пуст, если же секционная кривизна неотрицательная, то R_1 совпадает с R_0.

Для любого тензорного поля классов R_2, R_3 и R_6 из (3) последует

$$\int_M \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i, e'_j, e'_i, e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 \Big\} dv \geq 0. \qquad (5)$$

Таким образом, на компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) отрицательной секционной кривизны классы R_2, R_3 и R_6 пусты, если же секционная кривизна неположительная, то перечисленные классы совпадают с R_0.

Библиографический список

1. Б у р г и н ь о н Ж.П. Формулы Вейценбека в размерности 4 // Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985. С.260-273.

2. Б е с с е А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т.2.

3. С т е п а н о в С.Е. Техника Бохнера в теории римановых структур почти произведения // Матем. заметки. 1990. Т.48. № 2. С.93-98.

УДК 514.75

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС

А.В.С т о л я р о в

(Чувашский педагогический институт)

В настоящей работе рассматриваются пути приложения двойственной теории m-мерных регулярных гиперполос к изучению геометрии поверхностей V_m, погруженных в n-мерное проективное пространство P_n $(2 < m < n-1)$.

В.В.Вагнер во второй части работы [1] рассматривает теорию поля локальных регулярных гиперполос в дифференциально-геометрическом пространстве X_n и ее различные приложения: а) к задаче вариационного исчисления на безусловный экстремум, б) к вариационной задаче Лагранжа, в) к неголономной геометрии V_n^m в X_n, г) к динамике склерономных механических систем с нелинейными неголономными связями. Вопросы приложения теории поля локальных гиперполос в геометризацию динамики систем с неголономными связями рассматривает также А.В.Гохман [2].

В работе [3] нами найдены различные приложения теории m-мерных регулярных гиперполос H_m, погруженных в n-мерное проективное пространство P_n, к изучению геометрии поверхностей $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$. Основой всех этих приложений служит следующая теорема (см. [3]): поверхность $V_m \subset P_n$ $(m > 2)$, отличная от гиперповерхности, в дифференциальной окрестности 3-го порядка порождает инвариантно присоединенную к ней гиперполосу H_m, для которой данная поверхность является базисной; условием регулярности H_m является невырожденность симметрического тензора 3-го порядка $b_\alpha \Lambda^\alpha_{ij}$, $i,j = \overline{1,m}$; $\alpha = \overline{m+1,n}$.

Для регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, инвариантно присоединенной к поверхности V_m $(2 < m < n-1)$, справедливы результаты, полученные нами в работах [4] – [8]; здесь мы перечислим основные из них (применительно к поверхности $V_m \subset P_n$).

1) Используя схему доказательства полноты фундаментального объекта для $H_m \subset P_n$ [4], имеем, что порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$ не превосходит шести. Отметим, что согласно работе [9] для поверхности $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$ ее фундаментальный геометрический объект порядка не ниже 5-го порядка является полным, ибо внутреннее оснащение (в смысле Э.Картана [17]) поверхности возможно построить лишь в 4-й дифференциальной окрестности.

Заметим, что указанный результат устанавливает лишь верхнюю границу порядка полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$. Не исключено, что эта граница допускает понижение на единицу; например, в случае поверхности $V_m \subset P_n$ частного класса, а именно, поверхности Картана $V_m \subset P_{2n}$, $m > 2$ нам удалось доказать [10], что ее фундаментальный геометрический объект 5-го порядка является полным.

2) В дифференциальной окрестности 5-го порядка точки $A_0 \in V_m$ имеем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1} гиперполосы H_m [4] (а следовательно, ее базисной поверхности V_m). Следует заметить, что гиперквадрики этого поля отличны от инвариантных соприкасающихся гиперквадрик поверх-

13 Зак. 1399

ности $V_m \subset P_n$, найденных в работе [9] в 4-й дифференциальной окрестности.

Используя инвариантное условие квадратичности гиперполосы $H_m \subset P_n$ (см. [5]), теперь нетрудно найти критерий принадлежности поверхности $V_m \subset P_n$ неподвижной гиперквадрике.

3) Так как возможно построение двойственной теории регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ (см. [11]), то инвариантное присоединение H_m к $V_m \subset P_n$ позволяет построить двойственную теорию поверхности V_m.

4) В дифференциальной окрестности пятого порядка в каждой точке A_0 поверхности $V_m \subset P_n$ имеем пучок инвариантных нормалей первого рода, определяемых внутренним образом (см. [4]); из этого пучка выделяются, в частности, нормаль Фубини, директриса Вильчинского и т.д.

Используя двойственную теорию гиперполосы, теперь нетрудно получить поле пучка инвариантных внутренним образом определяемых нормалей второго рода поверхности $V_m \subset P_n$ [11]; следует заметить, что указанные поля пучков нормалей первого и второго родов на поверхности $V_m \subset P_n$ являются аналогами полей канонических пучков нормалей, найденных Г.Ф.Лаптевым [12] на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$.

5) Инвариантное присоединение регулярной гиперполосы H_m к $V_m \subset P_n$ позволяет изучать на поверхности V_m $(2 < m < n-1)$:

а) в касательном расслоении – две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения [5], индуцируемые нормализацией H_m в смысле Нордена-Чакмазяна (по терминологии [13]); в частности, геометрии обеих связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых нормализацией Фубини поверхности $V_m \subset P_n$, являются эквиаффинными, а их средняя геометрия – риманова [5]; следует заметить, что связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ на $V_m \subset P_n$ являются аналогами двойственных аффинных связностей без кручения, изучаемых А.П.Норденом [14] на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$;

б) в нормальных расслоениях нормализации Нордена-Чакмазяна – двойственные нормальные связности $\overset{1}{\mathcal{D}}$ и $\overset{2}{\mathcal{D}}$ и их подсвязности также двойственные между собой [8]; в частности, для поверхности $V_{n-2} \subset P_n$ в 5-й дифференциальной окрестности существует единственная инвариантная внутренним образом определяемая ее нормализация Нордена-Чакмазяна, поля инвариантных прямых и гиперпрямых [8] которой являются параллельными в двойственных нормальных связностях $\overset{1}{\mathcal{D}}$ и $\overset{2}{\mathcal{D}}$ соответственно; отметим, что А.В.Чакмазяном [15], [16] и другими исследователями нормальные связности на гиперполосе $H_m \subset P_n$ и поверхности $V_m \subset P_n$ изучаются без привлечения теории двойственности, а, следовательно, рассматривается лишь связность $\overset{1}{\mathcal{D}}$ и ее подсвязности;

в) две двойственные проективные связности без кручения [7], индуцируемые оснащением гиперполосы H_m, ассоциированной с $V_m \subset P_n$, в смысле Э.Картана [17]; в частности, условием совпадения этих связностей является касание 3-го порядка соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1} с поверхностью V_m; следует заметить, что Э.Картаном [17], Г.Ф.Лаптевым [18] и другими исследователями на поверхности $V_m \subset P_n$ (или распределении m-мерных линейных элементов) изучалась лишь одна (первая) проективная связность, а именно, связность, получаемая путем проектирования из оснащающей $(n-m-1)$-мерной плоскости на соответствующую касательную плоскость к поверхности;

г) двойственную геометрию сетей $\Sigma_m \subset V_m$ (см. [6]); в частности, это приводит к построению инвариантной нормализации поверхности полями гармонических плоскостей сети $\Sigma_m \subset V_m$, сопряженной относительно поля симметрического тензора $b_\alpha \Lambda^\alpha_{ij}$, а также позволяет изучать различные подклассы сетей $\Sigma_m \subset V_m$ (чебышевские и геодезические сети первого и второго родов и т.д.); отметим, что:

– двойственная геометрия сетей на гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ изучается нами в работе [19];

– при $2 < m < n-1$ геометрия сетей $\Sigma_m \subset V_m \subset P_n$ до сих пор изучалась без привлечения теории двойственности.

Библиографический список

1. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М.; Л., 1950. Вып.8. С.197-272.

2. Г о х м а н А.В. Дифференциальная геометрия и классическая динамика систем // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.111-138.

3. С т о л я р о в А.В. Приложение теории регулярных гиперполос к изучению геометрии многомерных поверхностей проективного пространства // Известия вузов. Матем. 1976. № 2. С.111-113.

4. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Известия вузов. Матем. 1975. № 10. С.97-99.

5. С т о л я р о в А.В. Условие квадратичности регулярной гиперполосы // Известия вузов. Матем. 1975. № 11. С.106-108.

6. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе // Известия вузов. Матем. 1977. № 8. С.68-78.

7. С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.25-54.

8. С т о л я р о в А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной гиперполосе // Известия вузов. Матем. 1985. № 9. С.72-75.

9. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.239-263.

10. С т о л я р о в А.В. О внутренней геометрии поверхности Картана // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.111-118.

11. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярной гиперполосы $H_m \subset P_{n,m}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.88-93.

12. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.

13. П о п о в Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос: Уч. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. 82с.

14. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432с.

15. Ч а к м а з я н А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.55-74.

16. Ч а к м а з я н А.В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990. 116с.

17. Cartan E. Les éspaces á connexion projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. 1937. Вып.4. С.147-159.

18. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

19. С т о л я р о в А.В. О двойственной геометрии сетей и полярно сопряженных конфигурациях на гиперповерхности // Известия вузов. Матем. 1972. № 4. С.109-119.

УДК 514.76

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ С ТРИПЛЕТНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Г.Ш.Т о д у а

(Тбилисский государственный университет)

Одно из центральных мест в геометрических исследованиях занимает теория дифференциальных инвариантов, начало которой создали К.Гаусс, Б.Риман, Т.Томас и др. Американский математик О.Веблен впервые доказал так называемые теоремы о замене и приведения для случая пространств аффинной связности без кручения [1]. Далее венгерские математики О.Варга [2], А.Рапчак [3] и их ученики обобщили результаты О.Веблена для более общих пространств (пространств линейных элементов с аффинной связностью, финслеровых пространств и пространств Картана). Б.Л.Лаптев обобщил результаты О.Веблена и венгерских математиков для произвольных пространств опорных элементов [4]. А.П.Урбонас обобщил некоторые теоремы Б.Л.Лаптева для произвольных пространств опорных элементов, но только с плоской линейной связностью [5], а Ю.И.Шинкунасу [6] и Т.Р.Джинчарадзе [7] удалось результаты Б.Л.Лаптева обобщить для пространств опорных элементов с неплоской линейной связностью.

В настоящей работе для векторного расслоения $L_m(V_n)$ $(2m=n(n-1))$ с триплетной связностью [8], тензор кривизны R^{α}_{ij} линейной связности Γ^{α}_{i} которой является частично ковариантно постоянным (равна нулю только ковариантная производная первого рода) и $\det \| R^{\alpha}_{ij} \| \neq 0$, найден новый вариант обобщения схемы О.Веблена, которая широко использована в работах Б.Л.Лаптева, А.П.Урбона-