ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Н.Т.Мочернюк

ВЫРОЖДЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КОНИК

Однопараметрические многообразия коник в P_3 естественно разбиваются на три типа: характеристика плоскости коники ℓ_4 имеет с коникой две общие точки, не имеет общих точек, касается коники.

В работе рассматривается третий тип, в котором различаются два класса: 1/точка касания не является точкой возврата характеристики ℓ_4; 2/точка касания совпадает с точкой возврата характеристики ℓ_4.

Система уравнений Пфаффа инвариантности коники

$$x^4=0,\quad a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\quad \alpha,\beta=1,2,3 \qquad (1)$$

согласно [1] при $n=3$, $h=1$, $k=2$ имеет вид

$$\Delta a_{\alpha\beta}=0,\quad \pi^4_\alpha=0,\quad \pi^\alpha_\alpha+\pi^4_4=0, \qquad (2)$$

где формы Пфаффа $\Delta a_{\alpha\beta}$ выглядят следующим образом:

$$\Delta a_{\alpha\beta}\equiv\delta a_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha-a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta-a_{\alpha\beta}\vartheta,\quad \gamma=1,2,3. \qquad (3)$$

Здесь ϑ -некоторая форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, а символ δ означает дифференциал при фиксированном главном параметре. Рассматриваются невырожденные коники, поэтому, по крайней мере, две величины из $a_{\alpha\beta}$, например a_{12} и a_{33}, отличны от нуля. Тогда

$$\vartheta=\frac{1}{a}(\delta a-a_{\gamma2}\pi^\gamma_1-a_{1\gamma}\pi^\gamma_2),\quad a\overset{df}{=}a_{12}, \qquad (4)$$

и система уравнений инвариантности (2) приводится к виду:

$$\begin{cases}\delta a_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha-a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta-\frac{a_{\alpha\beta}}{a}(\delta a-a_{\gamma2}\pi^\gamma_1-a_{1\gamma}\pi^\gamma_2)=0,\\ \pi^4_1=0,\ \pi^4_2=0,\ \pi^4_3=0,\ \pi^\alpha_\alpha+\pi^4_4=0.\end{cases} \qquad (5)$$

Потребуем, чтобы $a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$, $a_{33}=-a$, тогда коника определяется уравнениями

$$x^4=0,\quad (x^3)^2-2x^1x^2=0,$$

а первая строка системы (5) заменяется уравнениями

$$\pi^2_1=0,\ \pi^1_2=0,\ \pi^3_1-\pi^2_3=0,\ \pi^3_2-\pi^1_3=0,\ \pi^1_1+\pi^2_2-2\pi^3_3=0. \qquad (6)$$

Примем ω^4_1 за базисную форму; неравенство $\omega^4_1\neq0$ исключает возможность расположения вершины A_1 репера на характеристике ℓ_4:

$$x^4=0,\quad x^1\omega^4_1+x^2\omega^4_2+x^3\omega^4_3=0. \qquad (7)$$

Тогда из уравнений Пфаффа $\omega^4_2=\alpha\omega^4_1$, $\omega^4_3=\beta\omega^4_1$ обычным путем получаем равенства

$$\delta\alpha+\alpha(\pi^1_1-\pi^2_2+\beta\pi^3_1)-\beta\pi^3_2=0,\quad \delta\beta+\beta(\pi^1_1-\pi^3_3+\beta\pi^3_1)-\alpha\pi^2_3-\pi^1_3=0.$$

Положив здесь $\beta=0$, получаем $\omega^4_3=0$, $\alpha\pi^2_3+\pi^1_3=0$ и равенство

$$\delta\alpha+\alpha(\pi^1_1-\pi^2_2)=0.$$

Для того, чтобы характеристика ℓ_4 и коника касались, необходимо обращение в нуль относительного инварианта α (тогда $\pi^3_2=0$, $\pi^1_3=0$, =0).

1. Пусть $\alpha=0$, тогда характеристика ℓ_4 имеет уравнения $x^4=0$, $x^1=0$ и касается коники в точке A_2 репера. Построен аналитическим путем канонический репер, деривационные формулы которого таковы:

$$dA_1=(\eta A_1+A_2+A_4)ds,\quad dA_3=(\gamma A_3+\rho A_2)ds,$$

$$dA_2=(\xi A_2+\varepsilon A_1+\varepsilon A_3)ds,\quad dA_4=(\varphi A_1-\Phi A_4)ds,$$

где $\Phi=\gamma+\eta+\xi$ и $ds=\omega^4_1$. Приводим геометрическую характеристику построенного репера и инвариантов.

Вершина A_2 -точка касания характеристики ℓ_4 с коникой, A_3 -точка возврата ℓ_4, A_1 -точка пересечения поляры точки A_3 относительно коники с этой коникой. Касательная плоскость регулюса (A_1A_2) в точке A_1 проходит через точку A_4, являющуюся точкой возврата образующей торса, порожденного характеристиками этих касательных плоскостей. Пересечение касательной к линии (A_2) с ребром A_1A_2 дает единичную точку $E_{13}=A_1+A_3$, а с коникой – точку $R=2A_1+A_2+2A_3$, которая вместе с E_{13} позволяет определить единичные точки E_{12} и E_{23}. Касательная к линии (A_1) пересекает ребро A_2A_4 в точке E_{24}, которая вместе с точками E_{12}, E_{13}, E_{23} дает возможность определить единичные точки E_{14} и E_{24}.

Для инвариантов многообразия имеем

$$\rho=\mathcal{D}V(A_1A_3;E_{13}^{-}B);\quad \varepsilon=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}C);\quad \varphi=\varepsilon\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}P)$$

$$\gamma+\xi=\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}Q_1)+\varphi-1;\quad \xi-\eta=\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}Q_2)+\varepsilon-1,$$

$$\gamma-\eta=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}Q_3),\quad ds=\frac{\mathcal{D}V(A_1A_3;QE_{13})}{1-\eta\mathcal{D}V(A_1A_3;QE_{13})},$$

где $E_{\alpha\beta}^{-}=A_\alpha-A_\beta$; $E_{\alpha\beta}=A_\alpha+A_\beta$ и $\alpha,\beta=1,2,3,4$; B – точка пересечения характеристики плоскости $(A_1A_3A_4)$ с ребром A_1A_3; C – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{12}) на плоскость $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; P – точка пересечения характеристики плоскости $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_2A_4; Q_1 – точка пересечения касательной к линии (E_{14}) с ребром A_2A_4; Q_2 – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{12}) на плоскость $(A_1A_2A_4)$ с ребром A_2A_4; Q_3 – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{13}) на плоскость $(A_1A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; Q – точка пересечения плоскости, проходящей через ребро A_2A_4 и точку A_1+dA_1, близкую к точке A_1, с ребром A_1A_3 репера.

2. Поскольку $\pi_2^1=0$, $\pi_2^3=0$, $\pi_3^1=0$, то можно написать $\omega_2^1=m\omega_1^4$, $\omega_2^3=p\omega_1^4$, $\omega_3^1=n\omega_1^4$. Обычным путем из первого уравнения получаем

$$\delta m+m(\pi_3^3+3\pi_1^1)=0.$$

Вторая ситуация, указанная во вводной части, возможна только при обращении относительного инварианта m в нуль ($m=0$, $\omega_2^1=0$). Канонический репер этого многообразия имеет деривационные формулы

$$dA_1=(FA_1+A_3+A_4)ds,\quad dA_2=(BA_2+PA_3)ds,$$

$$dA_3=(CA_3+A_1+A_2)ds,\quad dA_4=(RA_1-TA_4)ds,$$

где $ds\equiv\omega_1^4$ и $T=B+C+F$.

В этом репере вершина A_2 – точка касания характеристики ℓ_4 с коникой и является точкой возврата ℓ_4; A_4 – такая единственная точка вне плоскости коники, что она описывает линию, касательная к которой в A_4 проходит через точку коники, отличную от A_2 (точку A_1), причем ребро A_1A_4 есть характеристика плоскости $(A_1A_3A_4)$ и A_4 – точка возврата этой характеристики; вершина является полюсом ребра A_1A_2 относительно данной коники. Единичная точка E_{12} есть точка пересечения касательной к линии (A_3) с ребром A_1A_2. Эта касательная пересекает конику в точках $G=A_1+A_2+\sqrt{2}A_3$ и $H=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3$, которые вместе с E_{12} позволяют определить точки E_{13} и E_{23}. Касательная к линии (A_1) персекает ребро A_3A_4 в точке E_{34}. Точки E_{12}, E_{13}, E_{23} и E_{34} дают возможность определить единичные точки E_{14} и E_{24}.

Инварианты многообразия характеризуются равенствами

$$F+B+C=-\mathcal{D}V(A_3A_4;F_{34}E_{34})-1,\quad B-F=\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}F_{24}),$$

$$C-F=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}K_{34}),\quad P=\mathcal{D}V(A_1A_2;E_{12}^{-}S_{12}),$$

$$R=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}^{-}S_{34}),\quad ds=\frac{\mathcal{D}V(A_1A_3;ME_{13})}{1-F\mathcal{D}V(A_1A_3;ME_{13})},$$

где F_{34} – точка пересечения касательной к линии (E_{14}) с ребром A_3A_4; F_{24} – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{12}) на плоскость $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_2A_4; K_{34} – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{13}) на плоскость $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; S_{12} и S_{34} – точки пересечения характеристик плоскостей, соответственно, $(A_1A_2A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ с ребрами A_1A_2 и A_3A_4; M – точка пересечения плоскости, проходящей через ребро A_2A_4 и точку A_1+dA_1, близкую к точке A_1, с ребром A_1A_3.

3.Приведем некоторые свойства рассмотренных многообразий, следующие из предыдущих рассуждений.

Т е о р е м а 1. Пары точек A_1, A_4 и A_2, A_3 (A_3, A_4 и A_1, A_2) являются квазифлекнодальными точками [2] для образующих пары регулюсов соответственно (A_1A_4) и (A_2A_3) ((A_3A_4) и (A_1A_2)).

Т е о р е м а 2. а/Необходимым и достаточным условием того, чтобы плоскость коники огибала конус с вершиной A_3, является совпадение характеристики плоскости $(A_1A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; б/Необходимым и достаточным условием того, чтобы торс (A_1A_4) вырождался в конус с вершиной A_4, является совпадение характеристики плоскости $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_3A_4.

Теоремы 1 и 2 верны для первого класса многообразий.

Т е о р е м а 3. Пара регулюсов (A_2A_3) и (A_4A_1) является парой торсов, ребра возврата которых описываются точками A_3 и A_4 (для первого класса), или A_2 и A_4 (для второго класса).

Для второго класса многообразий доказаны следующие предложения.

Т е о р е м а 4. а/Необходимым и достаточным условием того, чтобы плоскость коники огибала конус с вершиной A_2, является совпадение характеристики плоскости $(A_1A_2A_4)$ с ребром A_2A_4. б/Необходимым и достаточным условием того, чтобы торс (A_1A_4) вырождался в конус с вершиной A_4, является совпадение характеристики плоскости $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_2A_4.

Т е о р е м а 5. Пары вершин репера A_2, A_4 и A_1, A_3 (A_1, A_2 и A_4, A_3) - квазифлекнодальные точки образующих пары регулюсов соответственно (A_2A_4) и (A_1A_3) ((A_1A_2) и (A_4A_3)).

Из теоремы 4 получаем:

С л е д с т в и е 1. Если выполняются условия теоремы 4а, то торс, порожденный характеристиками плоскостей $(A_1A_2A_4)$, вырождается в конус с вершиной A_2.

С л е д с т в и е 2. Если выполнены условия теоремы 4б, то торс, порожденный характеристиками плоскостей $(A_2A_3A_4)$, вырождается в конус с вершиной A_4.

Список литературы

1.Мочернюк Н.Т. К дифференциальной геометрии многообразий алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом.сб. Вып.8, Томск, 1980, 202, с.19.

2.Ивлев Е.Т. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве.- Доклады научн.конф. по теоретич. и прикладн. вопросам математики. Томск, 1960, с.50-51.