УДК 514.75

О.О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
olgaobelova@mail.ru

Тензор кривизны аналога связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей

Получены выражения объекта кривизны связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии через компоненты объекта связности и фундаментального объекта 1-го порядка, а также пфаффовы производные компонент объекта связности. При нахождении дифференциальных сравнений, которым удовлетворяют компоненты объекта кривизны, учитывались четыре основные способа продолжений уравнений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей и один обобщающий способ. Показано, что в каждом из основных случаев объект кривизны связности Нейфельда является тензором, содержащим 2 простейших и 4 простых подтензора. При использовании обобщающего способа в дифференциальных уравнениях компонент объекта кривизны связности Нейфельда появляется тензор, названный виртуальным, поскольку он обращается в нуль в основных случаях.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, связность Нейфельда, кривизна, тензор, виртуальный тензор.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I\,,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A\,,$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I^J, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы *GP(n)* (см.: [1]):

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$
$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \tag{1}$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ [2] *m*-мерных центрированных плоскостей L_m^*, которое задается уравнениями

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha, \tag{2}$$

где $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ — фундаментальный объект 1-го порядка многообразия $V^* = Gr^*(m,n)$.

Дифференцируя уравнения (2) внешним образом, получим

$$(\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a) \wedge \omega^\alpha + \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \wedge \omega_b^\alpha + \Lambda_\alpha^a \Lambda_\beta^b \omega^\beta \wedge \omega_b^\alpha +$$
$$+\Lambda_\alpha^a \Lambda_\beta^{bc} \omega_c^\beta \wedge \omega_b^\alpha = 0, \tag{3}$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_\alpha^{ab} = d\Lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^{cb}\omega_c^a + \Lambda_\alpha^{ac}\omega_c^b - \Lambda_\beta^{ab}\omega_\alpha^\beta.$$

В равенствах (3) можно группировать слагаемые четырьмя основными способами (см.: [3]):

Способ 1

$$(\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a - \Lambda_\beta^a \Lambda_\alpha^b \omega_b^\beta) \wedge \omega^\alpha + (\Delta\Lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^a \Lambda_\beta^{bc}\omega_c^\beta) \wedge \omega_b^\alpha = 0.$$

При такой группировке после разрешения по лемме Картана получаем

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a - \Lambda_\beta^a \Lambda_\alpha^b \omega_b^\beta = \Lambda 1_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + \Lambda 1_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \tag{4_1}$$

$$\Delta\Lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^a \Lambda_\beta^{bc}\omega_c^\beta = \overline{\Lambda} 1_{\alpha\beta}^{ab} \omega^\beta + \Lambda 1_{\alpha\beta}^{abc} \omega_c^\beta. \tag{5_1}$$

Преобразуем уравнения (4_1, 5_1)

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 1^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + (\Lambda 1^{ab}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha)\omega^\beta_b ,$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \overline{\Lambda} 1^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + (\Lambda 1^{abc}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta)\omega^\beta_c .$$

Способ 2

$$(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha)\wedge\omega^\alpha + (\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta \omega^\beta + \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta \omega^\beta_c)\wedge\omega^\alpha_b = 0,$$

откуда после разрешения по лемме Картана получим

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 2^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 2^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b , \tag{4_2}$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta \omega^\beta + \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta \omega^\beta_c = \overline{\Lambda} 2^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 2^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c . \tag{5_2}$$

Можно преобразовать уравнения (5_2)

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = (\overline{\Lambda} 2^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta)\omega^\beta + (\Lambda 2^{abc}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\alpha \Lambda^{bc}_\beta)\omega^\beta_c .$$

Способ 3

$$(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha - \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha \omega^\beta_b)\wedge\omega^\alpha + (\Delta\Lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^a_\beta \Lambda^{cb}_\alpha \omega^\beta_c)\wedge\omega^\alpha_b = 0.$$

Разрешаем

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha - \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha \omega^\beta_b = \Lambda 3^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 3^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b , \tag{4_3}$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha - \Lambda^a_\beta \Lambda^{cb}_\alpha \omega^\beta_c = \overline{\Lambda} 3^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 3^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c . \tag{5_3}$$

Преобразуем уравнения (4_3, 5_3)

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 3^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + (\Lambda 3^{ab}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta \Lambda^b_\alpha)\omega^\beta_b ,$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \overline{\Lambda} 3^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + (\Lambda 3^{abc}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta \Lambda^{cb}_\alpha)\omega^\beta_c .$$

Способ 4

$$(\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha)\wedge\omega^\alpha + (\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta \omega^\beta - \Lambda^a_\beta \Lambda^{cb}_\alpha \omega^\beta_c)\wedge\omega^\alpha_b = 0.$$

Разрешаем

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda 4^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 4^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b , \qquad (4_4)$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha + \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta \omega^\beta - \Lambda^a_\beta \Lambda^{cb}_\alpha \omega^\beta_c = \overline{\Lambda} 4^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda 4^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c . \qquad (5_4)$$

Преобразуем уравнения (5_4)

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = (\overline{\Lambda} 4^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\alpha \Lambda^b_\beta)\omega^\beta + (\Lambda 4^{abc}_{\alpha\beta} + \Lambda^a_\beta \Lambda^{cb}_\alpha)\omega^\beta_c .$$

Во всех рассмотренных четырех способах выполняются условия симметрии

$$\Lambda I^a_{[\alpha\beta]} = 0 , \ \Lambda I^{ab}_{\alpha\beta} - \overline{\Lambda} I^{ab}_{\beta\alpha} = 0 , \ \Lambda I^{a\lceil bc \rceil}_{\lfloor \alpha\beta \rfloor} = 0 . \qquad (6)$$

В равенствах (6) $I = 1,...,4$, а квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам или их парам.

Обобщающий случай

Слагаемые, содержащие базисные формы, сразу переносятся в правую часть. Получаем

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b ,$$

$$\Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \overline{\Lambda}^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c ,$$

где только $\Lambda^a_{[\alpha\beta]} = 0$.

Утверждение. Фундаментальный объект 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda^a_\alpha , \Lambda^{ab}_\alpha\}$ многообразия $Gr^*(m,n)$ образует на многообразии квазитензор, содержащий тензор Λ^{ab}_α .

Базисные формы удовлетворяют вытекающим из (1) структурным уравнениям

$$\begin{aligned} D\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta + (\Lambda^a_\beta \omega^\beta + \Lambda^{ab}_\beta \omega^\beta_b) \wedge \omega^\alpha_a , \\ D\omega^\alpha_a &= \omega^\beta_b \wedge \Omega^{\alpha b}_{\beta a} + \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_{\beta a} , \end{aligned} \qquad (7)$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta}\,,\ \Omega^{\alpha b}_{\beta a} = \delta^{b}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}_{a}\,,\ \Omega^{\alpha}_{\beta a} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{a}\,. \tag{8}$$

Находим внешние дифференциалы от форм (8)

$$\begin{aligned}
D\Omega^{\alpha}_{\beta} &= \Omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\Omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\gamma}\wedge\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} + \omega^{\gamma}_{a}\wedge\Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}\,,\\
D\Omega^{\alpha b}_{\beta a} &= \Omega^{\gamma b}_{\beta c}\wedge\Omega^{\alpha c}_{\gamma a} + \omega^{\gamma}\wedge\Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} + \omega^{\gamma}_{c}\wedge\Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\,,\\
D\Omega^{\alpha}_{\beta a} &= \Omega^{\gamma}_{\beta b}\wedge\Omega^{\alpha b}_{\gamma a} + \Omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\Omega^{\alpha}_{\gamma a} + \omega^{\gamma}_{a}\wedge\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}\,,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Lambda^{a}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{\beta a} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta}\,,$$

$$\Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Lambda^{ba}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{\beta b} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta}\,,$$

$$\Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = -\Lambda^{b}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{\beta a} - \delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta}\,,$$

$$\Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = -\Lambda^{bc}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{\beta a} - \delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{c}_{\beta} - \delta^{c}_{a}\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}_{\gamma}\,,\ \Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma}\,.$$

Над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей $Gr^{*}(m,n)$ возникает главное расслоение L (Gr^{*}) со структурными уравнениями (7, 9), типовым слоем которого является группа Ли L, действующая в касательном пространстве к многообразию Gr^{*}. В главном расслоении L (Gr^{*}) зададим аналог связности Нейфельда [4; 5] способом Лаптева — Лумисте.

Введем новые формы

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} &= \Omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a}\,,\\
\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} &= \Omega^{\alpha b}_{\beta a} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{c}\,,\\
\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta a} &= \Omega^{\alpha}_{\beta a} - \Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma} - G^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{b}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Связность в главном расслоении L (Gr^*) задается с помощью поля объекта связности Γ={ $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}, L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}, \Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma}, G^{\alpha b}_{\beta a\gamma}$ } на базе $Gr^*(m,n)$ уравнениями (см.: [6])

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma a} + \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{a},$$

$$\Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} = L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + L^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{b},$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha bc}_{\beta a\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma c} + \Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{c},$$

$$\Delta L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} + \Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + L^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{e},$$

$$\Delta\Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma} - G^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma b} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu a\gamma}\Omega^{\mu}_{\beta b} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{\mu a} = \Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{b},$$

$$\Delta G^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha cb}_{\mu a\gamma}\Omega^{\mu}_{\beta c} + L^{\mu b}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{\mu a} + \delta^{b}_{a}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} = G^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + G^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{c}.$$

Подставляя дифференциальные уравнения компонент объекта Γ в выражения внешних дифференциалов форм (10), получим структурные уравнения форм связности

$$D\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu} + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}_{a} + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{a}\wedge\omega^{\mu}_{b},$$

$$D\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} = \tilde{\Omega}^{\gamma b}_{\beta c}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha c}_{\gamma a} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu} + R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}_{c} + R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{c}\wedge\omega^{\mu}_{e},$$

$$D\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta a} = \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta b}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\gamma a} + \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\gamma a} + R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu} + K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}_{b} +$$

$$+K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{b}\wedge\omega^{\mu}_{c},$$

где компоненты $R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}$, $R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}$, $R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}$, $R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}$, $R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}$, $R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}$, $R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu}$, $K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}$, $K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}$ объекта кривизны R связности Нейфельда выражаются по следующим формулам:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha}_{\eta[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},$$

$$R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - L^{\alpha a}_{\beta\mu\gamma} + L^{\eta a}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}L^{\alpha a}_{\eta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Lambda^{a}_{\gamma},$$

$$R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} = L^{\alpha}_{\beta}\left[{}^{ab}_{\gamma\mu}\right] + L^{\alpha}_{\eta}\left[{}^{a}_{\gamma}L^{\eta b}_{\beta\mu}\right] + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lfloor\gamma}\Lambda^{\lceil ab}_{\mu}\Big],$$

$$R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha b}_{\beta a[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha c}_{\eta a[\gamma}\Gamma^{\eta b}_{\beta c\mu]},$$

$$R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} - L^{\alpha bc}_{\beta a\mu\gamma} + L^{\eta bc}_{\beta e\mu}\Gamma^{\alpha e}_{\eta a\gamma} - \Gamma^{\eta b}_{\beta e\gamma}L^{\alpha ec}_{\eta a\mu} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Lambda^{c}_{\gamma},$$

$$R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu} = L^{\alpha b}_{\beta a}\left[{}^{ce}_{\gamma\mu}\right] + L^{\alpha d}_{\eta a}\left[{}^{c}_{\gamma}L^{\eta be}_{\beta d\mu}\right] + \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\lfloor\gamma}\Lambda^{\ulcorner ce}_{\mu}\Big],$$

$$R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu} = \Pi^{\alpha}_{\beta a[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha b}_{\eta a[\gamma}\Pi^{\eta}_{\beta b\mu]} + \Pi^{\alpha}_{\eta a[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},$$

$$K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} = \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} - G^{\alpha b}_{\beta a\mu\gamma} + G^{\eta b}_{\beta c\mu}\Gamma^{\alpha c}_{\eta a\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}G^{\alpha b}_{\eta a\mu} + L^{\eta b}_{\beta\mu}\Pi^{\alpha}_{\eta a\gamma} -$$

$$-\Pi^{\eta}_{\beta c\gamma}L^{\alpha cb}_{\eta a\mu} - \Pi^{\alpha}_{\beta a\mu}\Lambda^{b}_{\gamma},$$

$$K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} = G^{\alpha}_{\beta a}\left[{}^{bc}_{\gamma\mu}\right] + L^{\alpha e}_{\eta a}\left[{}^{b}_{\gamma}G^{\eta c}_{\beta e\mu}\right] - L^{\eta}_{\beta}\left[{}^{b}_{\gamma}G^{\alpha c}_{\eta a\mu}\right] + \Pi^{\alpha}_{\beta a\lfloor\gamma}\Lambda^{\ulcorner bc}_{\mu}\Big].$$

При нахождении дифференциальных сравнений для компонент объекта кривизны R связности Нейфельда используются продолжения уравнений компонент объекта связности Г, уравнения (4, 5) и учитываются условия симметрии (6). Эти сравнения для случаев 1—4 имеют вид

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} + R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_a \equiv 0, \ \ \Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} + 2R^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu}\omega_b \equiv 0, \ \ \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} + R^{\alpha bc}_{\beta a[\gamma\mu]}\omega_c \equiv 0, \ \ \Delta R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} + 2R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu}\omega_e \equiv 0, \ \ \Delta R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu} + (K^{\alpha b}_{\beta a[\gamma\mu]} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} - \delta^{b}_{a}R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu})\omega_b \equiv 0, \qquad (11)$$

$$\Delta K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} + (2K^{\alpha cb}_{\beta a\gamma\mu} + R^{\alpha cb}_{\beta a\gamma\mu} - \delta^{c}_{a}R^{\alpha b}_{\beta\gamma\mu})\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} + (R^{\alpha ebc}_{\beta a\gamma\mu} - \delta^{e}_{a}R^{\alpha bc}_{\beta\gamma\mu})\omega_e \equiv 0.$$

Несмотря на различия продолжений уравнений компонент объекта связности Г дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны в любом из четырех случаев имеют вид (11), откуда следует

Теорема. *Объект кривизны R связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии $V^* = Gr^*(m,n)$ является тензором, содержащим 2 простейших [7] подтензора $\{R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$,*

$\{R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\}$ *и 4 простых подтензора* $\{R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$, $\{R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$, $\{R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}, R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu}\}$, $\{R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}, R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}, R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu}\}$.

Для обобщающего случая часть дифференциальных сравнений (11) принимает более общий вид

$$\begin{aligned}&\Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} + (2R^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu} - \delta^{\alpha}_{\beta} M^{ba}_{\gamma\mu})\omega_b \equiv 0,\ \ \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} - \delta^{\alpha}_{\beta} M^{cab}_{\gamma\mu}\omega_c \equiv 0,\\ &\Delta R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} + (2R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu} + \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{b}_{a} M^{bc}_{\gamma\mu})\omega_b \equiv 0, \Delta R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu} + \delta^{\alpha}_{\beta} M^{bce}_{\gamma\mu}\omega_a \equiv 0,\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$M^{ab}_{\alpha\beta} = \Lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \overline{\Lambda}^{ab}_{\beta\alpha} - \Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{b}_{\alpha}\,,\ M^{abc}_{\alpha\beta} = \Lambda^{a[bc]}_{[\alpha\beta]} + \Lambda^{a}_{[\alpha}\Lambda^{[bc]}_{\beta]}\,.$$

Компоненты введенного объекта $M = \{M^{ab}_{\alpha\beta}, M^{abc}_{\alpha\beta}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta M^{ab}_{\alpha\beta} - 2M^{abc}_{\beta\alpha}\omega_c \equiv 0\,,\ \Delta M^{abc}_{\alpha\beta} \equiv 0\,.$$

Таким образом, M является тензором, содержащим подтензор $\{M^{abc}_{\alpha\beta}\}$. Назовем M виртуальным тензором, так как в каждом из четырех рассмотренных случаев он обращается в нуль. Тогда дифференциальные сравнения (12) превращаются в соответствующие сравнения из системы (11).

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* О структурных уравнениях проективной группы // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. Вып. 31. С. 93—100.

2. *Белова О.О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2006. №5 (52) С. 18—20.

3. *Белова О.О.* Тензор кривизны в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2009. Вып. 40. С. 18—28.

4. *Норден А.П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 1981. №11. С. 80—83.

5. *Малахальцев М.А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Там же. 1986. №2. С. 67—69.

6. *Белова О.О.* Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассманподобном многообразии центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 23—29.

7. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

O. Belova

The curvature tensor of an analog of Neifeld's connection on the Grassman-like manifold of centered planes

The expression of the curvature object of Neifeld's connection on the Grassman-like manifold of centered planes by the components of the connection object, fundamental object of the 1st order and phaffian derivatives of the components of connection object are obtained. Finding the differential comparisons which components of curvature object satisfy we take into account four basic ways and one generalizing way of continuations of the equations for the Grassman-like manifold of centered planes. It is shown, that in every basic case the curvature object of Neifeld's connection is a tensor. It contains 2 elementary and 4 simple subtensors. Using a generalizing way we have a tensor in the differential equations for the components of curvature object. This tensor is called virtual as it vanishes in the basic cases.

УДК 514.76

К.М. Буданов
Пензенский государственный университет
ko13bud@rambler. ru

Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта над максимально подвижным пространством

Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта над максимально подвижным пространством.