УДК 514.76

Г. А. Банару[1]
[1] *Смоленский государственный университет, Россия*
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-3

О несуществовании структуры Кенмоцу на *acm*-гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия

Установлено, что почти контактная метрическая структура косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести не может быть структурой Кенмоцу.

Ключевые слова: келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, структура косимплектического типа, структура Кенмоцу.

1. К числу самых важных дифференциально-геометрических структур на многообразиях относится почти контактная метрическая структура (almost contact metric, *acm*-структура). Напомним, что под почти контактной метрической структурой на нечетномерном ориентируемом многообразии N понимают четверку тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются такие условия [1]:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \aleph(N).$$

Поступила в редакцию 12.05.2019 г.

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Одним из наиболее содержательных примеров почти контактных метрических структур является введенная в рассмотрение в начале 70-х годов прошлого века структура Кенмоцу, которую обычно определяют следующим условием [2]:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \aleph(N).$$

Многообразия Кенмоцу и их многочисленные обобщения — одна из самых популярных тем современных исследований в области контактной геометрии. В этой области работают десятки геометров и физиков из различных стран. Выделим фундаментальную монографию [3] румынского специалиста Г. Питиша, содержащую практически все результаты в области многообразий Кенмоцу, которые были получены до 2005 года.

2. Около 10 лет назад В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев ввели в рассмотрение особый вид *acm*-структуры, получивший название структуры косимплектического типа [4]. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой. Отметим, что структура Кенмоцу является важнейшим нетривиальным примером *acm*-структуры косимплектического типа (тривиальным примером, естественно, служит косимплектическая структура).

В статье [5] рассматривались оснащенные *acm*-структурой косимплектического типа гиперповерхности келеровых многообразий. Было установлено, что матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N^{2n-1}, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа, в келерово многообразие M^{2n}, $n \geq 3$, имеет вид:

$$\left(\sigma_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c}
\sigma_{\alpha\beta} & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & 0 \\
\hline
0\dots0 & \sigma_{nn} & 0\dots0 \\
\hline
0 & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & \sigma_{\hat\alpha\hat\beta}
\end{array}\right), \quad p,s=1,\dots,2n-1.$$

Давно известна первая группа структурных уравнений *acm*-структуры на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести [6]:

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}\wedge\omega+i\sigma^{\alpha\beta}\omega_{\beta}\wedge\omega;$$

$$d\omega_{\alpha}=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}-i\sigma^{\beta}_{\alpha}\omega_{\beta}\wedge\omega-i\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\beta}\wedge\omega; \qquad (1)$$

$$d\omega=-i\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}+i\sigma_{n\beta}\omega\wedge\omega^{\beta}-i\sigma^{\beta}_{n}\omega\wedge\omega_{\beta}.$$

Здесь $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ — компоненты форм смещения $(\omega^{n}=\omega)$; $\{\omega^{k}_{j}\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_{a}=\omega^{\hat a}$; $\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n-1$; $a,b,c=1,\dots,n$; $\hat a=a+n$.

Принимая во внимание упомянутый выше результат из [5], для случая *acm*-структуры косимплектического типа мы можем переписать уравнения (1) в следующем виде:

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+i\sigma^{\alpha\beta}\omega_{\beta}\wedge\omega;$$

$$d\omega_{\alpha}=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}-i\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\beta}\wedge\omega; \qquad (2)$$

$$d\omega=0.$$

Теперь сопоставим (2) с первой группой структурных уравнений структуры Кенмоцу [1]:

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+\omega\wedge\omega^{\alpha};$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha;$$

$$d\omega = 0.$$

Видно, что в силу независимости базисных форм уравнения (2) не могут соответствовать структуре Кенмоцу. Таким образом, доказана

Теорема. *аст-структура косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести не может быть структурой Кенмоцу.*

Доказанная теорема дополняет результаты о почти контактных метрических структурах, индуцированных на гиперповерхностях келеровых многообразий [7; 8].

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

2. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

3. *Pitiş Gh.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Braşov, 2007.

4. *Кириченко В. Ф., Ускорев И. В.* Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. 2008. Т. 84, №6. С. 838—850.

5. *Банару Г. А.* О почти контактной метрической структуре косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 7—11.

6. *Степанова Л. В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

7. *Степанова Л. В.., Банару Г. А., Банару М. Б.* О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2016. №1. С. 86—89.

8. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, №4. С. 719—723.

G. Banaru[1]
[1] *Smolensk State University*
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-3

On nonexistence of Kenmotsu structure on *acm*-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold

Submitted on May 12, 2019

Almost contact metric (*acm*-)structures induced on oriented hypersurfaces of a Kählerian manifold are considered in the case when these *acm*-structures are of cosymplectic type, i. e. the contact form of these structures is closed. As it is known, the Kenmotsu structure is the most important non-trivial example of an almost contact metric structure of cosymplectic type.

The Cartan structural equations of the almost contact metric structure of cosymplectic type on a hypersurface of a Kählerian manifold are obtained. It is proved that an almost contact metric structure of cosymplectic type on a hypersurface of a Kählerian manifold of dimension at least six cannot be a Kenmotsu structure. Moreover, it follows that oriented hypersurfaces of a Kählerian manifold of dimension at least six do not admit non-trivial almost contact metric structures of cosymplectic type that belong to any well studied class of *acm*-structures. The present results generalize some results on almost contact metric structures on hypersurfaces of an almost Hermitian manifold obtained earlier by V. F. Kirichenko, L. V. Stepanova, A. Abu-Saleem, M. B. Banaru and others.

Keywords: Kählerian manifold, almost contact metric structure, structure of cosymplectic type, Kenmotsu structure.

References

1. *Kirichenko, V. F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013) (in Russian).

2. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. Tôhoku Math. J. 24, 93—103 (1972).

3. *Pitiş, Gh.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Braşov: Publ. House Transilvania Univ. (2007).

4. *Kirichenko, V. F., Uskorev, I. V.:* Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures. Mathematical Notes, **84**:5, 783—794 (2008).

5. *Banaru, G. A.:* On the almost contact metric structure of cosymplectic type on a hypersurface of a Kähler manifold**.** Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 49, 7—11 (2018) (in Russian).

6. *Stepanova, L. V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow (1995) (in Russian).

7. *Stepanova, L. V., Banaru, G. A., Banaru, M. B.:* On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kähler manifolds. Russian Mathematics, **60**:1, 73—75 (2016).

8. *Banaru, M. B.:* On almost contact metric 1-hypersurfeces in Kählerian manifolds. Siberian Mathematical Journal, **55**:4, 585—588 (2014).