УДК 514.75

Н. А. Елисеева

(Калининградский государственный технический университет)

Изучение полей плоскостей, параллельных в нормальных связностях $\mathcal{H}$(П)-распределения

Данная статья — продолжение работы [1]. Рассмотрены поля плоскостей, являющиеся параллельными в нормальных связностях, индуцируемых $\mathcal{H}$(П)-распределением в расслоениях нормалей первого и второго рода на оснащенном Λ-подрасслоении.

Ключевые слова: распределение, подрасслоение, поле плоскостей, оснащение, нормальная связность.

В работе используется следующая система индексов:

$$K=\overline{1,n}\,;\ \bar{I},\bar{K}=\overline{0,n}\,;\ \sigma=\overline{1,n-1}\,;\ p,q,t=\overline{1,r}\,;$$

$$i,j,k=\overline{r+1,m}\,;\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}\,;\ u,v=\overline{r+1,n-1}\,;$$

$$\hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n}\,;\ \Phi=0,1\,;\ \Psi=\overline{0,11}\,.$$

Пусть $\mathcal{H}$(П)-распределение оснащено в смысле Нордена — Бортолотти. Определим, следуя работе [2], нормаль второго рода N_{r-1} как пересечение $n-r+1$ гиперплоскостей

$$\xi_0\equiv\Pi_{n-1},\ \xi_v,\ \eta_n=\xi_n-\Lambda_n^{pq}\nu_q^0\xi_p+\Lambda_n^{vu}\lambda_u^0\xi_v,$$

где $\xi_{\bar{I}}$ — элементы тангенциального репера:

$$\xi_0=\rho[A_0,A_p,A_i,A_\alpha],\ \xi_n=\rho[A_n,A_p,A_i,A_\alpha],$$

$$\xi_p=\rho\sum_q\Lambda_{qp}^n[A_0,A_1,\ldots,A_{q-1},A_n,A_{q+1},\ldots,A_r,A_i,A_\alpha],$$

$$\xi_i = \rho \sum_j \Lambda^n_{ji} [A_0, A_p, A_{r+1} \ldots, A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, \ldots, A_m, A_\alpha],$$

$$\xi_\alpha = \rho \sum_\beta \Lambda^n_{\beta\alpha} [A_0, A_p, A_i, A_{m+1}, \ldots, A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, \ldots, A_{n-1}],$$

при этом $\rho = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{S}}$, $S \overset{def}{=} \det \begin{Vmatrix} \Lambda^n_{pq} & \Lambda^n_{pj} & \Lambda^n_{p\beta} \\ 0 & \Lambda^n_{ij} & \Lambda^n_{i\beta} \\ 0 & 0 & \Lambda^n_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} \neq 0,$

$$d \ln S - 2\omega^\sigma_\sigma + (n-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) = S_K \omega^K_0,$$

$$\lambda^0_i = \frac{1}{r} \Lambda^p_{ip}, \ \nabla \lambda^0_i - \omega^0_i = \lambda^0_{iK} \omega^K_0,$$

$$\lambda^0_\alpha = \frac{1}{r} \Lambda^p_{\alpha p}, \ \nabla \lambda^0_\alpha - \omega^0_\alpha = \lambda^0_{\alpha K} \omega^K_0,$$

$$\lambda^0_v = \{\lambda^0_i, \lambda^0_\alpha\}, \ \nabla \lambda^0_v - \omega^0_v = \lambda^0_{vK} \omega^K_0.$$

Для тензоров первого порядка Λ^n_{pq}, Λ^n_{ij}, $\Lambda^n_{\alpha\beta}$ введены обращенные тензоры Λ^{pq}_n, Λ^{ij}_n, $\Lambda^{\alpha\beta}_n$, компоненты которых соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\Lambda^{pq}_n \Lambda^n_{qt} = \Lambda^{qp}_n \Lambda^n_{tq} = \delta^p_t, \ \nabla \Lambda^{pq}_n - \Lambda^{pq}_n \omega^0_0 = \Lambda^{pq}_{nK} \omega^K_0,$$

$$\Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{jk} = \Lambda^{ji}_n \Lambda^n_{kj} = \delta^i_k, \ \nabla \Lambda^{ij}_n - \Lambda^{ij}_n \omega^0_0 = \Lambda^{ij}_{nK} \omega^K_0,$$

$$\Lambda^{\alpha\beta}_n \Lambda^n_{\beta\gamma} = \Lambda^{\beta\alpha}_n \Lambda^n_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\gamma, \ \nabla \Lambda^{\alpha\beta}_n - \Lambda^{\alpha\beta}_n \omega^0_0 = \Lambda^{\alpha\beta}_{nK} \omega^K_0.$$

Следуя [3], поле B-мерных плоскостей $N_B \supset N_{r-1}$ $(B \geq r-1)$ будем называть параллельным в нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\overline{\nabla}}}{}^{\perp}$, если выполняются условия

$$dx^{\hat{u}} + x^{\hat{v}} \overset{\Phi\Psi}{\overline{\overline{\Theta}}}{}^{\hat{u}}_{\hat{v}} - x^{\hat{u}} x^{\hat{v}} \overset{\Phi\Psi}{\overline{\overline{\Theta}}}{}^{0}_{\hat{v}} = x^{\hat{u}} \overline{\Theta} (\mathrm{mod}\,\lambda), \ D\overline{\Theta} = \overline{\Theta} \wedge \overline{\Theta}^0_0, \qquad (1)$$

где $x^{\hat{u}}$ — коэффициенты разложения проходящей через нормаль 2-го рода N_{r-1} гиперплоскости $\mu = \xi_0 + x^u \xi_u + x^n \eta_n$.

Системы форм $\{\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{0}_{\hat{u}}, \overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}}\}$, определяющие нормальные связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ в расслоении нормалей второго рода, двойственные по отношению к связностям $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ относительно инволютивного преобразования $J : \omega^{\bar{I}}_{\bar{K}} \to \overline{\omega}^{\bar{I}}_{\bar{K}}$, приведены в работе [4].

Поле характеристик $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ базисного Λ-подрасслоения $\mathcal{H}$(П)-распределения параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$. Так как характеристика $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ и плоскость $\Lambda(A_0)$ двойственны по отношению друг к другу, то поле r-мерных плоскостей базисного Λ-подрасслоения параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$.

Из соотношений (1) получаем, что аналитическое условие параллельности в связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ поля инвариантных $(n-2)$-мерных плоскостей $[\xi_0\eta_n]$ [2], каждая из которых содержит соответствующую нормаль второго рода N_{r-1}, эквивалентно равенству $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{v}_{n} = 0 \pmod{\lambda}$, равносильному обращению в нуль тензора $A^t_{nv}(\nu)$:

$$A^t_{nv}(\nu) \overset{def}{=} \nu^0_p \lambda^{pt}_{nv} + \lambda^0_{vq} \Lambda^{qt}_n,$$

где $\lambda^{pt}_{nv} \overset{def}{=} \Lambda^p_{vq}\Lambda^{qt}_n - \lambda^0_v \Lambda^{pt}_n$ — тензор второго порядка.

Так как характеристика $E_{n-m-1}(A_0)$ М-подрасслоения и плоскость $M(A_0)$ двойственны по отношению друг к другу и поле Е-плоскостей параллельно в нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ [1], то поле M-плоскостей параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}^{i}_{\alpha} = 0 \pmod{\lambda}$, что равносильно условиям $\overline{\Lambda}^i_{\alpha p} = 0$ или

$$\Lambda_{ip}^{\alpha}=0. \tag{2}$$

Учитывая, что плоскости $L_{m-r}(A_0)$ и $\Psi_{n-m+r-1}(A_0)$ двойственны по отношению друг к другу, а поле L-плоскостей параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ [1], то поле Ψ-плоскостей параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\overset{\Phi\Psi}{\overline{\Theta}}{}_{i}^{\alpha}=0 \pmod{\lambda}$, что равносильно равенствам $\overline{\Lambda}_{ip}^{\alpha}=0$ или

$$\Lambda_{\alpha p}^{i}=0. \tag{3}$$

В результате проведенных рассуждений можно сформулировать следующие теоремы:

Теорема 1. *Поле L-плоскостей (М-плоскостей) переносится параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$) тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (2), которые имеют следующую геометрическую интерпретацию:*

1) М-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L);

2) М-подрасслоение голономно;

3) $\mathcal{H}(\Pi)$-распределение представляет собой $(n-r)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос H_m^r.

Теорема 2. *Поле Е-плоскостей (Ψ-плоскостей) переносится параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overset{\Phi\Psi}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$) тогда и только тогда, когда выполняются равенства (3), которые имеют следующую геометрическую интерпретацию:*

1) Ψ-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, E);

2) Ψ-подрасслоение голономно;

3) $\mathcal{H}(\Pi)$*-распределение представляет собой* $(n-r)$*-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос* $H^{r}_{n-m+r-1}$.

Список литературы

1. *Елисеева Н. А.* Поля плоскостей, параллельные в нормальных связностях $\mathcal{H}(\Pi)$-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2011. Вып. 42. С. 41—47.
2. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: монография. 2-е изд. Чебоксары, 1994.
3. *Столяров А. В.* Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. науки). 1996. №6. С. 9—14.
4. *Елисеева Н. А.* Нормальные связности, индуцируемые в расслоении нормалей второго рода на Λ-подрасслоении $\mathcal{H}(\Pi)$-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 63—66.

N. Eliseeva

Investigation of the plane fields parallel in normal connections of $\mathcal{H}(\Pi)$-distribution

This article develops some ideas of [1]. Plane fields parallel in normal connections, induced in a bundle of normals of the 1st and 2nd kind on Λ-subbundle of $\mathcal{H}(\Pi)$-distribution are considered.

УДК 514.75

М. В. Кретов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Комплексы конусов

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуются комплексы T_3 (трехпараметрические семейства) конусов, вершины которых описывают двумерные мно-