ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Л.А.Ж а р и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ С ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В трехмерном эквиаффинном пространстве продолжается изучение класса конгруэнций P парабол, начатое в работе [2]. Исследованы свойства конгруэнций $B^{k}(A)$ парабол, где k -порядок фокальной точки A конгруэнции. Доказано, что если точка A -фокальная точка второго (третьего) порядка, то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции P, установлены некоторые свойства конгруэнции $B^{3}(A)$.

Отнесем образующий элемент $\mathcal{F}$ конгруэнции P к реперу $R=\{A;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Начало A репера поместим в фокус, образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями. Вектор $\vec{e}_1$ направим по касательной к параболе в точке A, вектор по диаметру параболы, проходящему через точку A, вектор $\vec{e}_2$ по касательной к линии, сопряженной фокальной линии $\omega^2=0$. В этом репере уравнение параболы $\mathcal{F}$ и система уравнений Пфаффа конгруэнции P имеют соответственно вид (1) и (2):

$$\begin{cases}(x^1)^2-2px^3=0, & p\neq 0,\\ x^2=0;\end{cases} \tag{I}$$

$$\frac{dp}{p}=p_1\omega^1+p_2\omega^2,$$

$$\omega_1^1=-\frac{1}{8}\{(3a+c)\omega^1+(3b+e)\omega^2\},$$

$$\omega_1^2=f\omega^1+g\omega^2,$$

$$\omega_1^3=\omega^1,$$

$$\omega_2^1=(f-b)\omega^1+(g-c)\omega^2,$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{8}\{(a+3c)\omega^1+(b+3c)\omega^2\},$$

$$\omega_2^3=-\omega^2, \tag{2}$$

$$\omega_3^1=h\omega^1+k\omega^2,$$

$$\omega_3^2=r\omega^1+s\omega^2, \qquad \omega^3=0.$$

О п р е д е л е н и е 1. Точка A тогда и только тогда является фокальной точкой k-порядка, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\mathcal{F}=0, & x^2=0,\\ d\mathcal{F}=0, & dx^2=0,\\ d^2\mathcal{F}=0, & d^2x^2=0,\\ d^k\mathcal{F}=0, & d^kx^2=0\end{cases}$$

вдоль любого направления $\omega^i=t^i\tau\ (i=1,2)$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $B^k(A)$ ($k\geqslant 2$) называется конгруэнция парабол P, если точка A является фокальной точкой k-порядка.

Из определений 1 и 2 следует, что конгруэнции $B^2(A)$ и $B^3(A)$ характеризуются соотношениями (3) и (4) соответственно

$$p=1, \quad f=g=s=0, \tag{3}$$

$$p=1, \quad a=b=f=g=r=s=0. \tag{4}$$

Анализируя систему (2) при условиях (3) и (4), приходим к заключению, что

1/ конгруэнции $B^2(A)$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов;

2/ конгруэнции $B^3(A)$ существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента;

3/ если фокальная точка A третьего порядка описывает невырождающуюся фокальную поверхность, то она является фокальной точкой произвольного порядка α ($\alpha \geqslant 4$);

4/если точка A, -фокальная точка второго (третьего порядка),то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции A;

5/для конгруэнции $B^3(A)$ справедливы следующие утверждения:

а/прямолинейные конгруэнции $\{A,\vec{e}_i\}, i=1,2$ -цилиндрические;б/у прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_3\}$ сдвоенный фокус совпадает с характеристической точкой плоскости $x^1=0$,а фокальная сеть линий - координатная; в/характеристическая точка плоскости параболы совпадает с точкой A, г/существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A,\vec{e}_2\}$.

Список литературы

1.Малаховский В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии.-Тр.Томского ун-та,т.161,1962 ,с.76-86.

2.Вербицкая Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград,1980,вып.11,с.17-21.

3.Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.13.Калининград,1982,с.60-64.

4.Шмелева С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик в P_3 с двумя фокальными многообразиями второго порядка.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.15,Калининград,1984,с.115-120.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.Т.И в л е в

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕНЗОРА РИЧЧИ РАССЛОЕНИЯ $P_{n,n}$

В статье дается геометрическая интерпретация одного тензора,аналогично тензору Риччи пространства аффинной связности [1](с.151).

1.Рассматривается пространство $P_{n,n}$ проективной связности C с точечным образующим элементом A_0 в смысле [2].Компоненты тензора кручения-кривизны $R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij}$ ($\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L}=0,1,\dots,n$; $i,j,k,\ell=1,2,\dots,n$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см.(2) в [2]):

$$\nabla R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij}+2R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij}\omega^0_0=R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij\ell}\,\omega^{\ell}_0,\quad R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}(ij)}=0,\quad R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}(ij)\ell}=0. \qquad (1)$$

2.Рассматриваются на секущей n-поверхности $\mathfrak{M}_n$ расслоения $P_{n,n}$ следующие величины,удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$a_{i0}=a_{0i}=R^{k}_{0ik},\quad a_{ij}=\frac{1}{2}R^{k}_{(ij)k}, \qquad (2)$$

$$\nabla a_{i0}+a_{i0}\omega^0_0=a_{0ij}\,\omega^j_0,\quad \nabla a_{ij}+2a_{ij}\omega^0_0-a_{0(i}\omega^0_{j)}=a_{ijk}\,\omega^k_0, \qquad (3)$$

$$a_{0ij}=R^{k}_{0ikj}+R^{k}_{jki}-R^{0}_{0ij},\quad a_{ijk}=\frac{1}{2}R^{\ell}_{(ij)\ell k}-\frac{1}{2}R^{0}_{(ij)k}.$$

Из (3) следует,что величины a_{0i} образуют один раз ковариантный тензор в смысле Г.Ф.Лаптева [3],а величины a_{ik} -дважды ковариантный симметрический тензор.

Рассмотрим в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}$ некоторую точку $Y=y^{\mathcal{J}}A_{\mathcal{J}}$ и гиперплоскость Γ_{n-1} ,определяемую в локальных слоевых координатах уравнением:

$$x_i x^i=0. \qquad (4)$$

Из формул (8) статьи [2] и уравнения (4) следует,что каждой Y и гиперплоскости Γ_{n-1} в слое P_n точки A_0 отвечает линейный гиперкомплекс $K_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y)$,опреде-