рассматриваемых как гиперквадрики пространства P_n, задается в P_n системой

$$L_{ijm} x^j + L_{imm} x^m = 0, \qquad (20)$$

которая, с учетом того, что в нашем репере имеем $A^i_\alpha = L^i_\alpha$, и в силу (2.42) [2] и (11), приводится к виду

$$x^i - Q^i x^m = 0. \qquad (21)$$

Для нормали ν^i, определяемой точкой $P(x^i, x^m) \in P_n$, получаем

$$\nu^i = \frac{x^i}{x^m} = Q^i. \qquad (22)$$

Нами доказано

П р е д л о ж е н и е 7. Фокальное направление, соответствующее несобственной фокальной точке $\sigma(L)$ нормали L, определяется нормалью I рода Q, для которой точка $\sigma(Q)$ является пересечением поляр точки $\sigma(L)$ относительно всех гиперквадрик пространства P_n, принадлежащих семейству $C(J)$.

Заметим, что в общем случае множество главных точек однозначно определяет многообразие J, а, следовательно, семейства $\varphi(J)$ и $C(J)$. Таким образом, из предложений 6 и 7 вытекает, что рассмотренные в них фокальные свойства распределения $\mathfrak{A}$ полностью определяются множеством главных точек отображения f, основанных на понятии $K(P_\alpha)$ - главных прямых теории точечных отображений.

Библиографический список

1. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

2. А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.5. С.169-193.

3. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

4. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия, 1970. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1971. С.153-174.

5. Ч е х Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I // Чехосл. матем. ж. 1952. V.2. N1. P.91-107.

6. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ $(m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.5-9.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ОДНОМЕРНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

И.С.Б а с ю к

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрена конгруэнция $\mathcal{L}$ невырожденных линейчатых квадрик, фокальное многообразие каждой из которых содержит: 1) линию; 2) точку A, описывающую поверхность; 3) точку B, не принадлежащую прямолинейным образующим, проходящим через точку A. Доказано, что фокальная линия квадрики $Q \in \mathcal{L}$ является коникой; рассмотрены частные подклассы.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{L}$ к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_i - точки пересечения прямолинейных образующих, проходящих через фокальные точки $A_0 \equiv A$ и $A_3 \equiv B$ квадрики $Q \in \mathcal{L}$ (здесь и далее $i,j,k = 1,2$, $i \neq j$, по i, j суммирование не производится). Уравнение квадрики Q приводится к виду $F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0$. Конгруэнция $\mathcal{L}$ описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \omega_3^0 = 0, \quad \omega_0^3 = 0, \quad \omega_j^i = a_{jk}\omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = b_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = c_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^i = m_{jk}\omega^k, \\ \Omega \equiv \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = h_k\omega^k, \end{cases} \qquad (1)$$

причем выполняются соотношения:

$$b_{12} = b_{21}, \quad c_{11}m_{22} - c_{22}m_{11} + c_{21}m_{12} - c_{12}m_{21} = 0,$$

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{21} & c_{11} & c_{21} & h_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_{12} & b_{22} & c_{12} & c_{22} & h_2 \end{Vmatrix} = 2. \qquad (2)$$

Фокальное многообразие квадрики $Q \in \mathcal{L}$ определяется системой уравнений:

$$F = 0, \quad F_i \equiv -a_{ki}(x^k)^2 + b_{ki}x^0x^k + c_{ki}x^kx^3 + h_i x^1x^2 = 0. \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$\xi = \frac{x^1}{x^0}, \quad \eta = \frac{x^2}{x^0}, \quad \zeta = \frac{x^3}{x^0}.$$

Система уравнений (3) примет вид:

$$\xi\eta - \zeta = 0, \quad -a_{1i}\xi^2 - a_{2i}\eta^2 + b_{1i}\xi + b_{2i}\eta + c_{1i}\xi\zeta + c_{2i}\eta\zeta + k_i\xi\eta = 0 \qquad (4)$$

Система (4) имеет бесконечно много решений, поэтому в результате исключения двух неизвестных из первых двух уравнений и подстановки в третье должно получиться тождество.

Система (4) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\xi\eta - \zeta = 0, \quad F_\xi \equiv \xi\beta^1_\gamma\xi^\gamma = 0, \quad F_\eta \equiv \eta\beta^2_\gamma\eta^\gamma = 0 \qquad (\gamma = \overline{0,6}).$$

Коэффициенты β^i_γ можно записать в виде:

$$\beta^i_0 = (a_j b_j)(b_i b_j),$$

$$\beta^i_1 = (b_i b_j)(a_j k + b_j c_j) - (a_j b_j)(a_i b_j - b_i k) - (a_j b_i)^2,$$

$$\beta^i_2 = (b_i b_j)(a_j c_i - c_j k) - (a_j b_j)(a_i k - b_i c_i) - 2(a_j b_i)(a_i a_j + b_i c_j) - (a_j k + b_j c_j)(a_i b_j - b_i k),$$

$$\beta^i_3 = (b_i b_j)(c_i c_j) - (a_j b_j)(a_i c_i) + 2(a_j b_i)(a_i c_j) - (a_i a_j + b_i c_j)^2 - (a_j c_i - c_j k)(a_i b_j - b_i k) - (a_j k + b_j c_j)(a_i k - b_i c_i),$$

$$\beta^i_4 = -(c_i c_j)(a_i b_j - b_i k) - (a_i c_i)(a_j k + b_j c_j) + 2(a_i c_j)(a_i a_j + b_i c_j) - (a_i k - b_i c_i)(a_j c_i - c_j k),$$

$$\beta^i_5 = -(c_i c_j)(a_i k - b_i c_i) - (a_i c_i)(a_j c_i - c_j k) - (a_i c_j)^2,$$

$$\beta^i_6 = -(a_i c_i)(c_i c_j),$$

где обозначения введены следующим образом:

$$a_i b_j \equiv a_{i1}b_{j2} - a_{i2}b_{j1}, \quad c_i k \equiv c_{i1}k_2 - c_{i2}k_1.$$

Уравнения $F_\xi = 0$, $F_\eta = 0$ должны выполняться тождественно, поэтому $\beta^i_\gamma = 0$. Анализируя эту систему и учитывая условия (2), приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{L}$ к следующему виду:

$$\begin{cases} \omega^0_3 = 0, \quad \omega^3_0 = 0, \quad \omega^2_1 = a_1(\alpha\omega^1 + \omega^2), \quad \omega^1_2 = a_2(\omega^1 + \beta\omega^2), \\ \omega^1_3 - \omega^2 = b(\alpha\omega^1 + \omega^2), \quad \omega^3_2 - \omega^1 = b(\omega^1 + \beta\omega^2), \\ \omega^0_1 - \omega^2_3 = c(\alpha\omega^1 + \omega^2), \quad \omega^0_2 - \omega^1_3 = c(\omega^1 + \beta\omega^2), \\ \omega^2_3 = m(\alpha\omega^1 + \omega^2), \quad \omega^1_3 = m(\omega^1 + \beta\omega^2), \\ \Omega = -(a_1 + \alpha a_2)\omega^1 - (\beta a_1 + a_2)\omega^2, \end{cases} \qquad (5)$$

причем выполняется ограничение

$$\alpha\beta - 1 \neq 0. \qquad (6)$$

Система уравнений фокального многообразия квадрики $Q \in \mathcal{L}$ принимает вид:

$$F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad F_1 \equiv (\alpha x^1 + x^2)(bx^0 - a_k x^k + cx^3) = 0,$$
$$F_2 \equiv (x^1 + \beta x^2)(bx^0 - a_k x^k + cx^3) = 0.$$

Эта система описывает конику C:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad bx^0 - a_k x^k + cx^3 = 0$$

и (с учетом ограничения (6)) точки A_0, A_3. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Фокальная линия квадрики Q конгруэнции $\mathcal{L}$ является коникой.

Возможен и другой подход к получению условий, характеризующих конгруэнцию $\mathcal{L}$. Определяемое системой (3) фокальное многообразие – это множество общих точек квадрики Q и ассоциированных квадрик Q_i, определяемых уравнениями $F_i = 0$. Потребовав, чтобы линия пересечения Q и Q_i принадлежала квадрике Q_j, получим соотношения:

$$a_i b_i = 0, \quad b_i c_i = 0, \quad a_i b_j + b_i k = 0, \quad b_1 c_2 + b_2 c_1 = 0,$$

которые позволяют привести систему (1), (2) к виду (5), (6).

Рассмотрим два подкласса конгруэнции $\mathcal{L}$. Назовем конгруэнцию $\mathcal{L}$ конгруэнцией $\mathcal{L}'$ в случае, если коника C распадается на пару прямых. Конгруэнция $\mathcal{L}'$ выделяется следующими соотношениями [1]:

$$b = 0, \quad a_i = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad c \neq 0.$$

Фокальное многообразие квадрики $Q \in \mathcal{L}'$ состоит из пары прямых A_0A_i и неинцидентной им точки A_3.

Назовем конгруэнцию $\mathcal{L}$ конгруэнцией $\mathcal{L}''$, если фокальная коника C не распадается. Конгруэнцию $\mathcal{L}''$ характеризуют соотношения [2]:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad c + m = a_1 a_2.$$

Фокальное многообразие квадрики $Q \in \mathcal{L}''$ состоит из коники

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad bx^0 - a_k x^k + (a_1 a_2 - m)x^3 = 0$$

и неинцидентных ей точек A_0, A_3.

Теорема 2. 1) Поверхность (A_0) конгруэнции $\mathcal{L}'$ является линейчатой квадрикой с прямолинейными образующими A_0A_i;

2) асимптотические линии на поверхностях (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathcal{L}''$ соответствуют; 3) прямолинейные конгруэнции (A_0A_3) конгруэнций $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ вырождаются в связки прямых, а поверхности (A_i) вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются.

Доказательство. 1) Квадрика

$$\Phi \equiv x^1x^2 - x^0x^3 + \frac{1}{2}(x^3)^2 = 0$$

инвариантна, т.к. $d\Phi = 2\theta\Phi$. Она содержит точку A_0 и прямые A_0A_i квадрики $Q \in \mathcal{L}'$.

2) Уравнения асимптотических линий поверхностей (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathcal{L}''$ приводятся к одному и тому же виду:

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

3) Все прямые конгруэнции (A_0A_3) содержат инвариантную точку $L = mA_0 - A_3$, $dL = \omega_3^3 L$, которая является центром связки. Для конгруэнций $\mathcal{L}'$ имеем:

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega^j\left((c+m)A_0 + A_3\right).$$

Следовательно, касательные к линиям (A_i) пересекаются в точке $M' = (c+m)A_0 + A_3$. Аналогично, касательные к линиям (A_i) конгруэнции $\mathcal{L}''$ пересекаются в точке $M'' = a_1a_2A_0 + a_2A_1 + a_1A_2 + (1+b)A_3$.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.

2. Шмелева С.В. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик с нераспадающейся фокальной коникой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1993. Вып.24. С.123-126.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАР ТОЧЕК В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.П.Бугаева

(Калининградский государственный университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассмотрено вырожденное многообразие $(PP^*)_{3,1}$, порожденное точкой P, описывающей трехмерную поверхность (P) и точкой P^*, описывающей линию (P^*). Построен частично канонизированный репер многообразия $(PP^*)_{3,1}$, найдены ассоциированные геометрические образы и некоторые подклассы.

Отнесем четырехмерное проективное пространство P_4 к подвижному реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,5})$. Деривационные формулы репера R имеют вид: $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства: $D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности: $\omega_\alpha^\alpha = 0$.

Рассмотрим вырожденную конгруэнцию $(PP^*)_{3,1}$ [1], порожденную точками P и P^*, в которой семейство (P)-трехпараметрическое (гиперповерхность), а семейство (P^*)-однопараметрическое (линия). Соответствие между элементами пары (PP^*) установим следующим образом: каждой точке P поверхности (P) поставим в соответствие единственную точку P^* линии (P^*), полным прообразом которой является некоторая двумерная поверхность π_{P^*} на гиперповерхности (P).

Совместим вершину A_1 репера R с точкой P, вершины A_2, A_3 и A_4 поместим в касательную гиперплоскость T к гиперповерхности (P) в точке P, вершину A_5 совместим с точкой P^*, причем A_4 поместим в точку пересечения касательной к линии (P^*) в точке P^* с касательной гиперплоскостью T. Формы ω_1^{a+1}, ω_5^a $(a = \overline{1,5})$ являются структурными формами конгруэнции $(PP^*)_{3,1}$. Выберем формы ω_1^2, ω_1^3 и ω_5^4 за базисные и обозначим

$$\omega_1^2 = \theta_1, \quad \omega_1^3 = \theta_2, \quad \omega_5^4 = \theta_3 \quad (\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \neq 0). \tag{1}$$

Проведем аналитическую канонизацию репера. Тогда система пфаффовых уравнений конгруэнции $(PP^*)_{3,1}$ примет вид:

$$\begin{cases} \omega_1^5 = \omega_5^1 = \omega_5^2 = \omega_5^3 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0, \quad \omega_4^3 = k^3\theta_3, \ \omega_1^4 = \theta_3, \\ \omega_{i+1}^5 = \lambda^{ij}\theta_j, \ \omega_3^1 = m^k\theta_k, \ \omega_3^2 = n^k\theta_k, \ \omega_2^1 = c^k\theta_k, \\ \omega_2^3 = \tau^1\theta_1 + \tau^3\theta_3, \ \omega_2^4 = p^{1k}\theta_k, \ \omega_3^4 = p^{2k}\theta_k, \ \omega_5^5 - \omega_1^1 = p^{3k}\theta_k. \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\lambda^{ij} = \lambda^{ji}, \quad \lambda^{13} = 0, \quad \lambda^{23} \neq 0, \quad k^3 \neq 0, \quad p^{ij} = p^{ji} \quad (i,j,k = 1,2,3).$$

Геометрически построенный частично канонизированный репер характеризуется тем, что вершина A_4 описывает двумерное многообразие, т.к.

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \theta_3(k^3A_3 + \lambda^{33}A_5) + \theta_2\lambda^{23}A_5,$$

4 Зак. 1606