The special class of the composed three-compound distributions of the projective space is studied, which one is called as S-distribution. The task of S-distribution in a frame of 1-st order is adduced. The geometrical interpretation of a holonomicity of the main structural distributions of S-distribution is given. The dual image of regular S-distribution and dual projective connections, associate with S-distribution is considered. Four new classes regular hyperstrips of the projective space are entered into consideration.

УДК 514.75

М.А. Гаер
(Иркутский государственный университет)

ТЕОРИЯ КРИВЫХ И ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В СЕМИМЕРНОМ КОНФОРМНО-ОКТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В семимерном конформно-октавном пространстве *V* проведена канонизация репера кривой и гиперповерхности. Дана геометрическая характеристика канонического репера и инвариантов в пространстве *V*. Найдены кривые и гиперповерхности, для которых полученные реперы нельзя построить.

Введение

Рассмотрим конформно-октавное семимерное пространство V с фундаментальной группой $G_2 \cdot (R \setminus \{0\})$, в котором с точностью до скалярного множителя определено векторное произведение [,]. Для октавного репера $\bar{e}_i$, $i = \overline{1,7}$ выполняются соотношения

$$[\bar{e}_1,\bar{e}_2]=\bar{e}_3,\ [\bar{e}_1,\bar{e}_4]=\bar{e}_5,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_4]=\bar{e}_6,\ [\bar{e}_3,\bar{e}_4]=\bar{e}_7,\ [\bar{e}_1,\bar{e}_3]=-\bar{e}_2,$$
$$[\bar{e}_1,\bar{e}_5]=-\bar{e}_4,\ [\bar{e}_1,\bar{e}_6]=-\bar{e}_7,$$
$$[\bar{e}_1,\bar{e}_7]=\bar{e}_6,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_3]=\bar{e}_1,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_5]=\bar{e}_7,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_6]=-\bar{e}_4,$$
$$[\bar{e}_2,\bar{e}_7]=-\bar{e}_5,\ [\bar{e}_3,\bar{e}_5]=-\bar{e}_6,\ [\bar{e}_3,\bar{e}_6]=\bar{e}_5, \qquad (1)$$
$$[\bar{e}_3,\bar{e}_7]=-\bar{e}_4,\ [\bar{e}_4,\bar{e}_5]=\bar{e}_1,\ [\bar{e}_4,\bar{e}_6]=\bar{e}_2,\ [\bar{e}_4,\bar{e}_7]=\bar{e}_3,\ [\bar{e}_5,\bar{e}_6]=-\bar{e}_3,$$
$$[\bar{e}_5,\bar{e}_7]=\bar{e}_2,\ [\bar{e}_6,\bar{e}_7]=-\bar{e}_1.$$

Тройка векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ называется ***полурепером***, если она порождает ортогональный октавный репер, т. е. $\bar{e}_1 = \overline{f}_1$, $\bar{e}_2 = \overline{f}_2$, $\bar{e}_4 = \overline{f}_3$, $\bar{e}_3 = [\overline{f}_1, \overline{f}_2]$, $\bar{e}_5 = [\overline{f}_1, \overline{f}_3]$, $\bar{e}_6 = [\overline{f}_2, \overline{f}_3]$, $\bar{e}_7 = [[\overline{f}_1, \overline{f}_2], \overline{f}_3]$.

Всякий *конформно-октавный* репер имеет вид $\overline{e_1}' = \lambda \overline{e_1}, \dots, \overline{e_7}' = \lambda \overline{e_7}$, где λ – произвольный ненулевой множитель, а $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_7}$ – октавный репер, т. е. получается преобразованием подобия из октавного репера.

Скалярное произведение < , > определяется с точностью до константы, причём $< \bar{e}_i', \bar{e}_j' > = \begin{cases} \lambda^2, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$.

Хотя понятие длины отсутствует в нашем пространстве, но имеет смысл ввести термин *векторы, равные по длине*.

§1. Канонизация репера кривой

Канонизацию репера кривой проводим по методу внешних форм [2] и получаем следующие деривационные формулы канонического репера кривой:

$$\frac{dr}{ds} = \overline{e_1}, \quad \frac{d\overline{e_1}}{ds} = a_1\overline{e_1} + \overline{e_2}; \quad \frac{d\overline{e_2}}{ds} = -\overline{e_1} + a_1\overline{e_2} + a_2\overline{e_3} + a_3\overline{e_4},$$

$$\frac{d\overline{e_3}}{ds} = -a_2\overline{e_2} + a_1\overline{e_3} + a_3\overline{e_5}, \quad \frac{d\overline{e_4}}{ds} = -a_3\overline{e_2} + a_1\overline{e_4} + a_4\overline{e_5} + a_5\overline{e_6} + a_6\overline{e_7},$$

$$\frac{d\overline{e_5}}{ds} = -a_3\overline{e_3} - a_4\overline{e_4} + a_1\overline{e_5} - (1 + a_6)\overline{e_6} - a_5\overline{e_7},$$

$$\frac{d\overline{e_6}}{ds} = -a_5\overline{e_4} + (1 + a_6)\overline{e_5} + a_1\overline{e_6} + (a_2 + a_4)\overline{e_7},$$

$$\frac{d\overline{e_7}}{ds} = -a_6\overline{e_4} + a_5\overline{e_5} - (a_2 + a_4)\overline{e_6} + a_1\overline{e_7}.$$

§2. Геометрическая характеристика канонического репера и инвариантов кривой

Прежде всего определим инвариантный параметр s. Заметим, что мы не можем в качестве натурального параметра взять длину дуги, так как в рассматриваемом пространстве скалярное произведение векторов определено с точностью до константы. Тогда определим натуральный параметр как *величину угла между касательными векторами в начальной и текущей точках*: $s = \arccos \dfrac{\left\langle \overline{r'}(t_0), \overline{r'}(t) \right\rangle}{\left|\overline{r'}(t_0)\right| \cdot \left|\overline{r'}(t)\right|}$.

Таким образом, кривая становится параметризованной и тогда $\overline{e_1}$ определяется как вектор скорости.

Так как $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$ – полурепер, то достаточно определить геометрический смысл этих базисных векторов, а остальные – алгебраически через них выражаются. Итак, $\overline{e_1}$ – направляющий вектор касательной: $\overline{e_1} = \overline{r'}$. Из формулы ($2_3$) следует, что $\overline{e_2}$ – вектор, ортогональный к $\overline{e_1}$ и лежащий в двумерной соприкасающейся плоскости: $\overline{e_2} = \overline{r''} - a_1 \overline{r'}$. Далее, $\overline{e_3} = \left[\overline{e_1}, \overline{e_2}\right] = \left[\overline{r'}, \overline{r''}\right]$.

Найдем вычислительные формулы для a_1 и a_2. Они легко получаются из деривационных формул (2): $a_1 = \dfrac{\left\langle \overline{r''}, \overline{r'} \right\rangle}{\left|\overline{r'}\right|^2}$, $a_2 = \dfrac{\left\langle \overline{r'''}, \left[\overline{r'}, \overline{r''}\right] \right\rangle}{\left|\left[\overline{r'}, \overline{r''}\right]\right|^2}$. Геометрически это означает, что a_1 – кривизна проекции кривой в двумерную плоскость $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\right\}$; a_2 – кручение проекции кривой в 3-плоскость $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right\}$.

И наконец, осталось дать геометрическую интерпретацию третьему вектору полурепера – вектору $\overline{e_5}$. Положим $U = R \cdot \overline{e_1} \oplus R \cdot \overline{e_2} \oplus R \cdot \overline{e_3}$. Тогда $W = \{ w \in V / < u, w > = 0, \forall u \in U \}$ – ортогональное дополнение к U. В этих обозначениях $\dfrac{d\overline{e_3}}{ds} = u + w$, где u – проекция $\dfrac{d\overline{e_3}}{ds}$ на 3-плоскость U, а $w \in W$. Таким образом, $w = a_3 \overline{e_5}$. Итак, сначала находим вектор $\dfrac{d\overline{e_3}}{ds}$, затем проецируем его в 3-плоскость U, находим вектор

$w = \left(\frac{d\overline{e_3}}{ds} - u \right)$ и в качестве вектора $\overline{e_5}$ берём вектор, коллинеарный w и *равный по длине* $\overline{e_1}$.

Далее, $\overline{e_4} = \left[\overline{e_5}, \overline{e_1}\right]$, $\overline{e_6} = \left[\overline{e_2}, \overline{e_4}\right]$, $\overline{e_7} = \left[\overline{e_3}, \overline{e_4}\right]$, $a_4 = \frac{\left\langle \overline{e_4'}, \overline{e_5} \right\rangle}{\left|\overline{e_5}\right|^2}$, $a_5 = \frac{\left\langle \overline{e_4'}, \overline{e_6} \right\rangle}{\left|\overline{e_6}\right|^2}$, $a_6 = \frac{\left\langle \overline{e_4'}, \overline{e_7} \right\rangle}{\left|\overline{e_7}\right|^2}$.

§3. Основная теорема

В процессе построения канонического репера выяснилось, что рассматриваемый репер не строится для точки, прямой, а также для кривых, которые лежат в трёхмерной плоскости $\{e_1, e_2, e_3\}$, являющейся подалгеброй в V.

Стандартными рассуждениями доказывается основная

Теорема. *Задание произвольных гладких функций* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *определяет кривую с точностью до изоморфизма.*

§4. Канонизация репера гиперповерхности

Деривационные формулы гиперповерхности выпишем в следующем виде:

$$d\overline{r} = \Omega^i \overline{e}_i, \quad d\overline{e}_i = \Omega_i^j \overline{e}_j + \theta_i \overline{e}_7, \quad d\overline{e}_7 = -\theta_j \overline{e}_j + \varphi \overline{e}_7, \quad i, j = \overline{1,6}.$$

При каждом фиксированном значении i набор Ω_i^j порождает линейный оператор A_i в касательной гиперплоскости. Кроме того, формы θ_j образуют оператор *B*, φ – линейная дифференциальная форма, которая не является нулевой, так как пространство конформно.

Нам достаточно определить три из семи базисных векторов, составляющих полурепер. Канонизация проводилась по методу внешних форм и параллельно геометрически. Таким образом, получилось: $\overline{e}_7$ – вектор нормали к гиперповерхности; $\overline{e}_1$ – собственный вектор оператора *B*, принадлежащий собственному значению $\lambda_0 = 1$; $\overline{e}_2$ –

выбирается так, что линейная оболочка, натянутая на $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, содержится в ядре оператора A_1. Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12}^2 & a_{12}^3 & a_{12}^4 & a_{12}^5 & a_{12}^6 \\ 0 & a_{12}^3 & a_{13}^4 & a_{13}^4 & a_{13}^5 & a_{13}^6 \\ 0 & a_{12}^4 & a_{13}^2 & a_{14}^4 & a_{14}^5 & a_{14}^6 \\ 0 & a_{12}^5 & a_{13}^5 & a_{14}^5 & a_{15}^5 & a_{15}^6 \\ 0 & a_{12}^6 & a_{13}^6 & a_{14}^6 & a_{15}^6 & a_{16}^6 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{25}^2 & a_{26}^2 \\ a_{21}^3 & a_{22}^3 & a_{23}^3 & a_{24}^3 & a_{25}^3 & a_{26}^3 \\ a_{21}^4 & a_{22}^4 & a_{23}^4 & a_{24}^4 & a_{25}^4 & a_{26}^4 \\ a_{21}^5 & a_{22}^5 & a_{23}^5 & a_{24}^5 & a_{25}^5 & a_{26}^5 \\ a_{21}^6 & a_{22}^6 & a_{23}^6 & a_{24}^6 & a_{25}^6 & a_{26}^6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -a_{21}^2 & -a_{22}^2 & -a_{23}^2 & -a_{24}^2 & -a_{25}^2 & -a_{26}^2 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ a_{31}^3 & a_{32}^3 & a_{33}^3 & a_{34}^3 & a_{35}^3 & a_{36}^3 \\ a_{31}^4 & a_{32}^4 & a_{34}^3 & a_{34}^4 & a_{35}^4 & a_{36}^4 \\ a_{31}^5 & a_{32}^5 & a_{35}^3 & a_{35}^4 & a_{35}^5 & a_{36}^5 \\ -a_{21}^5 & a_{12}^3 - a_{22}^5 & a_{13}^3 - a_{23}^5 & a_{14}^3 - a_{24}^5 & a_{15}^3 - a_{25}^5 & a_{16}^3 - a_{26}^5 \\ 0 & -a_{12}^2 & -a_{12}^3 & -a_{12}^4 & -a_{12}^5 & -a_{12}^6 \end{pmatrix}.$$

Остальные векторы подвижного репера выражаются алгебраически через октавное произведение: $\bar{e}_3 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2]$, $\bar{e}_4 = [\bar{e}_3, \bar{e}_7]$, $\bar{e}_5 = [\bar{e}_7, \bar{e}_2]$, $\bar{e}_6 = [\bar{e}_1, \bar{e}_7]$.

Исключаются гиперповерхности, для которых а) линейный оператор *B* имеет собственное значение $\lambda_0 = 1$ кратности не меньше 2; б) линейный оператор *B* имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$.

Список литературы

1. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. 5-й семестр. М., 1982.
2. *Щербаков Р.Н.* Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1973.

M. Gaer

THEORY OF CURVES AND HYPERSURFACES IN 7-DIMENSIONAL CONFORMALY-OCTONION SPACE

We construct canonical frames of curves and hypersurfaces in 7-dimensional conformaly-octonion space. A geometric characteristic of these

frames and invariants of curves and hypersurface are given. We also define all curves and surfaces such that the canonical frames not exist.

УДК 514.76

А.И. Долгарев
(*Пензенский государственный университет*)

ПОВЕРХНОСТИ, АНАЛОГИЧНЫЕ ПЛОСКОСТЯМ, В НИЛЬПОТЕНТНОМ ОДУЛЯРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются аналоги плоскостей в одулярном нильпотентном пространстве. В общем случае кривизна этих поверхностей отлична от нуля.

Одуль на произвольной алгебраической структуре определяется в результате задания внешней операции [1]. Одули на группах Ли обобщают линейные пространства. Все 3-мерные разрешимые одули на группах Ли приведены в работе [2], среди них содержится единственный нильпотентный одуль – сибсон. Заменяя линейное пространство одулем в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, получаем вейлевские одулярные пространства, кратко ВО-пространства [3]. На ВО-пространствах определено касательное отображение в одуль, тем самым ВО-пространства включают римановы пространства как частный случай. ВО-пространство, одулем которого является нормированный сибсон, называется ЕС-пространством. Геометрии ЕС-пространства посвящены работы [4 – 6]. Не всякие три неколлинеарные точки ЕС-пространства определяют плоскость. Ниже определены квазиплоскости – аналоги плоскости; а также рассматриваются их свойства. Нормальная кривизна квазиплоскости отлична от нуля.

§ 1. ЕС-пространство

1. Сибсон. На многообразии R^3 троек действительных чисел *сибсон* Σ задается операциями: