N. Malakhovsky

CONICS INDUCED ISOGONAL AND ISOTOMIC CONVERSIONS OF A PLANE

By method of complex numbers in planimetry [1] the analytical expressions imaginary isogonal and isotomic of conics studied in [2] are given. It is shown, that a series known inscribed-described of real conics of a triangle are mutual concerning imaginary isogonal and isotomic of conics. The correlation conversions of a planes induced isogonal and isotomic by conics are shown by final sequence of conversions of a plane concerning real geometrical images. It is proved, that the set of all conversions of the plane induced by composition of correlation conversion of a point in its polar concerning an isogonal conic and correlation conversion of an obtained polar in the point concerning isotomic of a conic is form group, in which one unit is the conversion induced by an equilateral triangle.

УДК 514.76

О.А. Монахова
(Пензенский государственный педагогический институт)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕНИИ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ

Получены условия, которым должна удовлетворять линейная связность на базе, для того чтобы расслоение дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта было пространством с локально-симметрической связностью и пространством рекуррентной кривизны.

Пусть M_n – гладкое многообразие класса C^∞, ∇ – линейная связность на нем, $T_2^0(M_n)$ – расслоение дважды ковариантных тензоров над M_n. Произвольная локальная карта (U, x^i) на базе M_n порождает карту $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$, $i, j, k = 1, \dots, n$ на $T_2^0(M_n)$, где π: $T_2^0(M_n) \to M_n$ – каноническая проекция, x^i, x_{jk} – координатные функции на расслоении.

С помощью вертикальных и горизонтальных поднятий объектов, заданных на базе расслоенного пространства, можно строить объекты на расслоении [1]. Вертикальным лифтом функции f, заданной на базе M_n, является функция $f^V = f \circ \pi$ на $T_2^0(M_n)$. Вертикальные и горизонтальные лифты тензорных полей имеют следующее разложение в натуральном репере, образованном векторными полями $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial^{jk} = \dfrac{\partial}{\partial x_{jk}}$:

$Q^V = (Q_{ij})^V \partial^{ij}$ – вертикальный лифт тензорного поля $Q = Q_{ij} dx^i \otimes dx^j$;

$S^{V_1} = (S^i_j)^V x_{ik} \partial^{jk}$, $S^{V_2} = (S^i_j)^V x_{ki} \partial^{kj}$ – вертикальные лифты тензорного поля $S = S^i_j \partial_i \otimes dx^j$;

$X^H = (X^k)^V \partial_k + (X^s)^V ((\Gamma^m_{si})^V x_{mj} + (\Gamma^h_{sj})^V x_{ih}) \partial^{ij}$ – горизонтальный лифт векторного поля $X = X^i \partial_i$, где Γ^k_{ij} – компоненты связности ∇ в карте (U, x^i). Далее для удобства записи значок вертикального лифта функций будет опускаться.

Введенные таким образом лифты позволяют построить на $\pi^{-1}(U) \subset T_2^0(M_n)$ подвижной репер $\{D_i, D^{jk}\}$ и дуальный ему корепер $\{\Theta^i, \Theta_{jk}\}$, адаптированные к связности ∇, где

$$D_i = \partial_i^H = \partial_i + (\Gamma^m_{ip} x_{mq} + \Gamma^h_{iq} x_{ph}) \partial^{pq}, \; D^{jk} = (dx^j \otimes dx^k)^V = \partial^{jk},$$

$$\Theta^i = dx^i, \; \Theta_{jk} = (-\Gamma^t_{ij} x_{tk} - \Gamma^t_{ik} x_{jt}) dx^i + dx_{jk}.$$

С помощью горизонтального лифта связности ∇ построена в работе [2] линейная связность ∇^H на $T_2^0(M_n)$, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla^H_{Q^V} W^V = 0, \;\; \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \; \nabla^H_{Q^V} X^H = 0, \;\; \nabla^H_{X^H} Q^V = (\nabla_X Q)^V,$$

где Q, W – тензорные поля типа (0,2), X, Y – векторные поля на базе M_n. Найдены тензоры кривизны $\tilde{R}$ и кручения $\tilde{T}$ построенной связности ∇^H на расслоении:

$$\tilde{T}(X^H, Q^V) = \tilde{T}(Q^V, X^H) = \tilde{T}(Q^V, W^V) = 0,$$

$$\tilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - (R(X,Y))^{V_1} - (R(X,Y))^{V_2},$$

где T – тензор кручения связности ∇, R – тензор кривизны связности ∇;

$$\widetilde{R}(X^H,Y^H)Z^H=(R(X,Y)Z)^H,\ \widetilde{R}(Q^V,W^V)U^V=0,$$

$$\widetilde{R}(Q^V,X^H)Y^H=0,\ \widetilde{R}(Q^V,W^V)Y^H=0,\ \widetilde{R}(Q^V,X^H)W^V=0$$

$$\widetilde{R}(X^H,Y^H)Q^V=(-Q\overset{1}{\bullet}R(X,Y)-Q\overset{2}{\bullet}R(X,Y))^V,$$

где X, Y, Z – векторные поля на базе; Q, W, U – тензорные поля типа (0,2) на базе расслоения; R – тензор кривизны связности ∇ на базе M_n; свертки определены следующими условиями:

$$(Q\overset{1}{\bullet}R(X,Y))(A,B)=Q(R(X,Y)A,B),$$

$$(Q\overset{2}{\bullet}R(X,Y))(A,B)=Q(A,R(X,Y)B).$$

Получим условия, которым должна удовлетворять связность ∇ на M_n, для того чтобы связность ∇^H на $T_2^0(M_n)$ была локально-симметрической и с рекуррентной кривизной.

Напомним, что линейная связность на дифференцируемом многообразии локально-симметрическая тогда и только тогда, когда $T=0, \nabla R=0$ (T – тензор кручения, R – тензор кривизны связности) [3].

Связность ∇^H на $T_2^0(M_n)$ будет локально-симметрической, если

$$\widetilde{T}(X^H,Y^H)=(T(X,Y))^H-(R(X,Y))^{V_1}-(R(X,Y))^{V_2}=0.$$

Выпишем разложение левой части в локальных координатах (x^i,x_{jk}):

$$T^s_{kl}X^kY^l\partial^H_s-R(X,Y)^i_jx_{ik}\partial^{jk}-R(X,Y)^i_jx_{ki}\partial^{kj}=0.$$

В силу линейной независимости векторных полей адаптированного репера получим

$$T^s_{kl}X^kY^l=0,\ -R(X,Y)^i_jx_{ik}\delta^j_a\delta^k_b-R(X,Y)^i_jx_{ki}\delta^k_a\delta^j_b=0.$$

Отсюда следует $T=0$ и R = 0. Тем самым доказано следующее

Предложение 1. *Связность ∇^H на $T_2^0(M_n)$ локально-симметрическая тогда и только тогда, когда база расслоенного пространства локально-плоская.*

Известно, что пространством рекуррентной кривизны называется пространство аффинной связности, в котором $\nabla R=R\otimes\phi$, где ϕ – ковектор в этом пространстве; R – тензор кривизны связности ∇ [3].

Найдем условия, при которых связность ∇^H на $T_2^0(M_n)$ будет с рекуррентной кривизной: $\nabla^H \widetilde{R} = \widetilde{R} \otimes \Phi$, где Φ – 1-форма на расслоении.

Так как $(\nabla^H \widetilde{R})(X^H, Y^H, Z^H, A^H) = ((\nabla R)(X, Y, Z, A))^H$, где *X, Y, Z, A* – векторные поля на базе M_n; $(\nabla^H \widetilde{R})(X^H, Y^H, Q^V, A^H) =$ $= (-Q \overset{1}{\bullet}((\nabla_A R)(X, Y)) - Q \overset{2}{\bullet}((\nabla_A R)(X, Y)))^V$; Q – тензорное поле типа (0,2), то $((\nabla R)(X, Y, Z, A))^H = \widetilde{R}(X^H, Y^H, Z^H) \cdot \Phi(A^H)$. Учитывая, что $\widetilde{R}(X^H, Y^H, Z^H) = (\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}))^{\mathrm{H}}$ и $\Phi(\mathrm{A}^{\mathrm{H}}) = (\Phi_{\mathrm{i}} \mathrm{A}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{V}}$, а также то, что горизонтальные лифты векторных полей являются полулинейными гомоморфизмами [4], относительно вертикальных лифтов функций, получим $\nabla R = R \otimes \phi$, где $\phi = \Phi_i dx^i$. Из всего вышесказанного следует

Предложение 2. *Расслоенное пространство* $T_2^0(M_n)$ *является пространством рекуррентной кривизны связности* ∇^H *тогда и только тогда, когда база расслоения – пространство рекуррентной кривизны связности* ∇.

Список литературы

1. *Монахова О.А.* О некоторых лифтах на тензорном расслоении типа (0,2). Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2000. Т. 5.
2. *Она же.* Горизонтальный лифт связности в расслоении дважды ковариантных тензоров // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 2002.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
4. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.

O. Monakhova

ABOUT SOME PROPERTIES OF HORIZONTAL LIFT OF CONNECTION ON THE BUNDLE OF THE TENSORS OF THE TYPE (0,2)

The conditions which must correspond to the linear connection on the base of the bundle are obtained for the reason that the bundle of the tensors of the type (0,2) with the connection of the horizontal lift was locally symmetrical and the space of the recurrent curvature.