УДК 514.76

В.И. Паньженский, М.В. Сорокина
(Пензенский государственный педагогический университет)

ПРОДОЛЖЕНИЕ САСАКИ СПЕЦИАЛЬНОЙ (α, β)-МЕТРИКИ НА КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

Продолжается исследование обобщенного лагранжева пространства L^n с (α, β)-метрикой вида [1]:

$$g_{ij}(x,y)=e^{2\sigma(z)}a_{ij}(x), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x)$ – компоненты риманова метрического тензора α;

σ – произвольная функция аргумента $z=b_s y^s$; $b_i(x)$ – компоненты дифференциальной линейной формы β.

В настоящей работе изучается продолжение типа Сасаки метрики (1) с базы на ее касательное расслоение. Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы соответствующая почти эрмитова структура принадлежала тому или иному классу Грея-Хервеллы [2].

1. Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие $TM=\bigcup\limits_{x\in M}T_xM$ – касательное расслоение над M; $\pi:TM\to M$ – каноническая проекция. Если $x\to(x^i)$ – локальные координаты в $U\subset M$, то в $\pi^{-1}(U)\subset TM$ возникают естественные локальные координаты $(x,y)\to(x^i,y^i)$, где (x^i) – базисные координаты точки $x\in U$, а (y^i) – слоевые координаты вектора $y\in T_xM$ относительно натурального базиса $\{\partial_i\}$ $(\partial_i=\partial/\partial x^i)$.

Рассмотрим продолжение типа Сасаки обобщенной лагранжевой метрики (1) на касательное расслоение, т.е. риманову метрику G на TM, определенную следующими условиями:

$$G(X^h,Y^h)=G(X^v,Y^v)=g(X,Y),\ G(X^h,Y^v)=G(X^v,Y^h)=0, \tag{2}$$

где X, Y – векторные поля на M, X^v,Y^v, а X^h,Y^h – их вертикальные и горизонтальные лифты относительно связности Леви-Чивита ∇

римановой метрики $a_{ij}(x)$. В адаптированном репере $(\delta_i, \partial_{n+i})$, где $\delta_i = \partial_i - \Gamma^l_{ik} y^k \partial_{n+l}$, Γ^l_{ik} – коэффициенты связности ∇, метрика G имеет диагональный вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Коммутаторы векторных полей адаптированного репера будут иметь вид

$$[\delta_i, \delta_j] = R^k_{ij} \partial_{n+k}, \ [\delta_i, \partial_{n+j}] = \Gamma^k_{ij} \partial_{n+k}, \ [\partial_{n+i}, \partial_{n+j}] = 0, \qquad (4)$$

где $R^k_{ij} = y^l R^k_{ijl}$, R^k_{ijl} – тензор кривизны римановой метрики $a_{ij}(x)$.

Распределение горизонтальных площадок связности ∇ определяет на TM каноническую почти комплексную структуру J: $JX^h = X^v$, $JX^v = -X^h$. Метрика (3) является эрмитовой относительно J: $G(JX, JY) = G(X, Y)$, и мы имеем на TM почти эрмитову структуру (G, J).

Обозначим через $\overline{\nabla}$ каноническую финслерову связность обобщенного лагранжева пространства L^n с метрикой (1). Если (F^k_{ij}, C^k_{ij}) – коэффициенты связности $\overline{\nabla}$, определяемые разложением $\nabla_{\delta_i} \partial_j = F^k_{ij} \partial_k$, $\nabla_{\partial_{n+i}} \partial_j = C^k_{ij} \partial_k$, то

$$F^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} (\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_k g_{ij}), \qquad (5)$$

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} (g_{sj \cdot i} + g_{is \cdot j} - g_{ij \cdot s}). \qquad (6)$$

Для метрики (1) находим следующее выражение компонент связности $\overline{\nabla}$:

$$F^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \sigma' y^m (\Gamma^l_{pm} b_l - \partial_p b_m)(\delta^k_j \delta^p_i + \delta^k_i \delta^p_j - a^{kp} a_{ij}). \qquad (7)$$

2. В работе [3] приведены тензорные признаки классов Грея-Хервеллы почти эрмитовой структуры (TM, G, J) в случае, если g – произвольная лагранжева метрика, а ∇– произвольная, вообще говоря, нелинейная связность.

Почти эрмитова структура (TM, G, J) является келеровой, если [3]

$$g_{ij\cdot k} = g_{ik\cdot j}\,,\ B_{ijk} = B_{ikj} = B_{jik}\,,\ R_{ijk} = 0\,, \tag{8}$$

где $g_{ij\cdot k} = \partial g_{ij} / \partial y^k$, $R_{ijk} = R^t_{ij} g_{tk}$, $B_{ijk} = B^t_{ij} g_{tk}$, $B_{ijk} = B^t_{ij} g_{tk}$, $B^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - F^k_{ij}$.

Для метрики (1) имеем

$$B_{ijk} = \sigma' e^{2\sigma(z)} y^m (\Gamma^l_{pm} b_l - \partial_p b_m)(\delta^p_i a_{jk} + \delta^p_j a_{ik} - \delta^p_k a_{ij})\,, \tag{9}$$

а первое условие в (8) принимает вид: $2\sigma'(a_{ij} b_k - a_{ik} b_j) = 0$. Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда σ = const (предполагается, что форма β ненулевая). Это означает, что метрика (1) риманова и, следовательно, $F^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$, $B^k_{ij} = 0$. Из условия $R_{ijk} = 0$ следует, что $R^l_{ijk} = 0$, т.е. риманово пространство (M, α), – локально евклидово. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Почти эрмитова структура (TM, G, J) является келеровой тогда и только тогда, когда метрика (1) локально евклидова.*

Анализ условий, определяющих приблизительно келеровы структуры W_1[3], приводит нас к выводу, что *приблизительно келеровы структуры необходимо являются келеровыми*.

Почти эрмитова структура является почти келеровой (принадлежит классу W_2), если [3]

$$g_{ij\cdot k} = g_{ik\cdot j}\,,\ B_{ijk} = B_{kij}\,,\ R_{ijk} + R_{jki} + R_{kij} = 0\,. \tag{10}$$

Как было показано выше, первая серия равенств выполняется лишь в том случае, если метрика (1) является римановой, и, следовательно, $B_{ijk} = B_{kij} = 0$. Последняя серия равенств (10) выполняется тождественно в силу известного тождества для риманова тензора кривизны. Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Почти эрмитова структура (TM, G, J) является почти келеровой тогда и только тогда, когда метрика (1) является римановой.*

Почти эрмитова структура является эрмитовой семикелеровой (принадлежит классу W_3), если [3]

$$g^{ki}(g_{ij\cdot k} - g_{ik\cdot j}) = 0\,,\ g^{ik}(B_{ijk} - B_{ikj}) = 0\,,\ B_{ijk} = B_{kij}\,,\ R_{ijk} = 0 \tag{11}$$

Из $R_{ijk} = 0$ следует, что базисное многообразие (M, α) является локально евклидовым. Из первой серии равенств в (11) имеем

$$g^{ki}(g_{ij\cdot k}-g_{ik\cdot j})=a^{ik}\sigma'(a_{ij}b_k-a_{ik}b_j)=\sigma'(1-n)b_j=0\,.$$

Это условие выполняется только тогда, когда σ = const, т.е. метрика (1) является римановой. Значит, *эрмитова семикелерова структура (TM, G, J) необходимо является келеровой*.

Почти эрмитова структура является локально конформно келеровой (принадлежит классу W_4), если [3]

$$g_{ij\cdot k}-g_{ik\cdot j}=-\frac{1}{n-1}(g_{ij}g^{st}(g_{sk\cdot t}-g_{st\cdot k})-g_{ik}g^{ts}(g_{sj\cdot t}-g_{st\cdot j}))\,,$$

$$B_{ikj}-B_{ijk}=-\frac{1}{n-1}(-g_{ij}g^{st}(B_{tks}-B_{stk})+g_{ik}g^{ts}(B_{tjs}-B_{stj}))\,,\ B_{ikj}=B_{kij}\,,\ R_{ijk}=0\,. \tag{12}$$

Из последнего условия следует, что пространство (M, α) локально евклидово. Рассмотрим первую серию равенств в (12). Вычисляя левую ее часть, получим

$$g_{ij\cdot k}-g_{ik\cdot j}=2\sigma' e^{2\sigma(z)}(a_{ij}b_k-a_{ik}b_j)\,.$$

Вычисляя правую часть, будем иметь

$$-\frac{1}{n-1}(g_{ij}g^{st}(g_{sk\cdot t}-g_{st\cdot k})-g_{ik}g^{ts}(g_{sj\cdot t}-g_{st\cdot j}))=$$

$$=-\frac{1}{n-1}2\sigma' e^{2\sigma(z)}(a_{ij}(b_k-nb_k)-a_{ik}(b_j-nb_j))=$$

$$=-\frac{1}{n-1}2\sigma' e^{2\sigma(z)}(1-n)(a_{ij}b_k-a_{ik}b_j)=2\sigma' e^{2\sigma(z)}(a_{ij}b_k-a_{ik}b_j)\,.$$

Откуда следует, что первое условие в (12) выполняется тождественно. Рассмотрим вторую серию равенств в (12). Для метрики (1) имеем

$$B_{ikj}-B_{ijk}=\sigma' e^{2\sigma(z)}y^m(\Gamma^l_{pm}b_l-\partial_p b_m)(\delta^p_j a_{ik}-\delta^p_k a_{ij})\,,$$

$$-\frac{1}{n-1}(-g_{ij}g^{st}(B_{tks}-B_{stk})+g_{ik}g^{ts}(B_{tjs}-B_{stj}))=$$

$$=-\frac{1}{n-1}(-a_{ij}a^{st}\sigma' e^{2\sigma(z)}y^m(\Gamma^l_{pm}b_l-\partial_p b_m)(\delta^p_t a_{ks}-\delta^p_k a_{ts})+$$

$$+a_{ik}a^{ts}\sigma' e^{2\sigma(z)}y^m(\Gamma^l_{pm}b_l-\partial_p b_m)(\delta^p_t a_{js}-\delta^p_j a_{ts}))=$$

$$=-\frac{1}{n-1}\sigma' e^{2\sigma(z)}y^m(\Gamma^l_{pm}b_l-\partial_p b_m)(-a_{ij}(\delta^p_k-n\delta^p_k)+a_{ik}(\delta^p_j-n\delta^p_j))=$$

$$=\sigma' e^{2\sigma(z)}y^m(\Gamma^l_{pm}b_l-\partial_p b_m)(\delta^p_j a_{ik}-\delta^p_k a_{ij})\,,$$

и, следовательно, второе условие в (12) выполняется тождественно.

В силу того, что B_{ij}^k симметричны по нижним индексам, условие $B_{ikj} = B_{kij}$ выполняется тождественно. Итак, имеет место

Теорема 3. *Почти келерова структура (TM, G, J) является конформно келеровой тогда и только тогда, когда пространство (M, α) локально евклидово.*

Анализ инвариантных характеристик следующих шести классов почти эрмитовых структур позволяет сделать следующее заключение

Теорема 4. *Почти эрмитова структура (TM, G, J), определяемая метрикой (1) принадлежит классу $W_2 \oplus W_4$, т. е. является локально конформно почти келеровой структурой.*

Действительно, этот класс пространств характеризуется первыми двумя условиями в (12), которые, как было показано, выполняются тождественно, и последним равенством в (10), которое также является тождеством.

Список литературы

1. *Маштакова М.В.* Связность Картана в пространствах со специальной (α,β)-метрикой // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 2002. С. 162 – 167.

2. *Grey A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants // Annals Math. Pure and Appl. 1980. Vol. 123. № 4. P. 35 – 38.

3. *Паньженский В.И., Ширяев К.Б.* Тензорные признаки классов почти эрмитовых структур на касательном расслоении гладкого многообразия // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 1999. С. 126 – 132.

V. Panzhenskiy, M. Sorokina

SASAKI CONTINUATION OF SPECIAL (α, β)-METRICS ON TANGENT BUNDLE

The investigation of generalised Lagrange space L^n with (α, β)-metrics of form

$$g_{ij}(x,y) = e^{2\sigma(z)} a_{ij}(x), \tag{1}$$

where $a_{ij}(x)$ are the components of Riemannian metric tensor (α-metrics), σ is arbitrary function of argument $z = b_s y^s$, $b_i(x)$ are the components of differential form β is continues.

This paper is devoted to continuation Sasaki type of metrics (1) on tangent bundle research. Necessary and sufficient conditions of almost Hermitian structure membership to one of Grey-Hervella classes are obtained.

УДК 514.75

Ю.И. Попов
(Калининградский государственный университет)

ФЛАГОВЫЕ СТРУКТУРЫ МНОГООБРАЗИЯ $\mathbf{P_n^0}$ (H)

Тройку распределений, образованную соответственно распределениями r-плоскостей Λ (Λ-распределение), m-плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение, r<m<n-1) проективного пространства P_n с отношением инцидентности $X \in \Lambda \subset M \subset H$ их соответствующих элементов в каждом центре X, назовем трехсоставным распределением или H-распределением пространства P_n [4], при этом Λ-распределение назовем базисным распределением, а M-распределение и H-распределение – оснащающими распределениями. H -распределение проективного пространства P_n будем трактовать как H-подрасслоение многообразия P_n^0 (H) [1; 2; 4].

Многообразие P_n^0, в котором задано $\mathcal{H}$-подрасслоение, назовем расслоенным многообразием P_n^0 **($\mathcal{H}$)-**структуры, или кратко многообразием P_n^0 ($\mathcal{H}$).

Определение. Базисное Λ-подрасслоение называется *дополнительно реперированным* [1; 2], если к Λ-подрасслоению присоединены (*n-r*) инвариантных полей прямых, натягивающих в каждом центре X (*n-r*)-мерную плоскость $N_{n-r}^*(X)$, имеющую с соответствующей Λ-плоскостью одну общую точку *X*.

Пусть на многообразии P_n^0 ($\mathcal{H}$) задано поле инвариантных нормалей $\nu(X)$ 1-го рода $\mathcal{H}$-подрасслоения [5; 6; 8], внутренним образом присоединенных в дифференциальной окрестности по-