УДК 514.76

А. Абу-Салим[1], М. Б. Банару[2], Г. А. Банару[2]
[1] Университет Аль-аль-Байт, Мафрак, Иордания
[2] Смоленский государственный университет,
ул. Пржевальского, 4 (Смоленск), Россия
[1] dr_ahmad57@yahoo.com, [2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-1

Заметка об аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий

Рассматривается вопрос о так называемых аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий, то есть об условиях, при которых через каждую точку почти эрмитова многообразия проходит почти контактная метрическая гиперповерхность с заданными свойствами.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, почти эрмитово многообразие, аксиома почти контактных метрических гиперповерхностей, ориентируемая гиперповерхность

1. О том, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура, известно с середины прошлого века. До последней четверти XX века наиболее содержательные работы о почти контактных метрических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий выполнили известные японские и американские геометры: М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно, Д. Блэр, С. Голдберг. С 1980-х го-

Поступила в редакцию 26.03.2024 г.

дов этой тематикой занимался замечательный отечественный геометр В. Ф. Кириченко, а затем и некоторые его ученики. Среди последних мы выделим Л. В. Степанову, чей фундаментальный труд [1], по нашему мнению, не только содержит множество глубоких результатов, но и задал целое направление в геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий.

В своем исследовании Л. В. Степанова неоднократно рассматривала ситуацию, когда через каждую точку некоторого почти эрмитова многообразия проходит почти контактная метрическая гиперповерхность с определенными свойствами. Так сложилось, что эту ситуацию чаще всего как в отечественных, так и в зарубежных источниках описывают следующим образом: рассматриваемое почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме соответствующих (то есть обладающих заданными свойствами) почти контактных метрических гиперповерхностей. Скорее всего, В. Ф. Кириченко был первым, кто стал использовать такую терминологию в отечественных журналах (см.: [2]). Наши попытки установить, кто именно из зарубежных авторов впервые стал употреблять данную терминологию, успехом не увенчались. Отметим только, что очень многие известные геометры использовали выражение «аксиома почти контактных метрических гиперповерхностей» еще до выхода в свет упомянутой выше статьи В. Ф. Кириченко [2]. В качестве примера приведем работу известнейшего бельгийского специалиста в области эрмитовой геометрии Л. Ванхеке [3].

2. Нам представляется достаточно очевидным, что сам термин «аксиома» не очень уместен в данном контексте. Особенно если речь идет о русскоязычном читателе, для которого термин «аксиома» традиционно означает совсем иное. Такой читатель, скорее всего, познакомился с этим понятием в школе, когда изучал геометрию по учебнику А. Н. Колмогорова, А.В. Погорелова или Л.С. Атанасяна. Потом он узнал о различных системах аксиом во время обучения в вузе (например, при изучении курсов оснований геометрии, числовых систем и т.д.). В самом деле, ведь если существуют почти эрмитовы многообразия, удовлетворяющие аксиоме тех или иных почти контактных метрический гиперповерхностей, то, следовательно, возможна и ситуация, когда многообразие не удовлетворяет той или иной аксиоме. К сожалению, случаев с неудачной терминологией в эрмитовой и контактной геометриях (под которыми мы, естественно, понимаем геометрические теории почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий соответственно) в научной литературе немало. Намного больше, чем должно было бы быть. Не будем приводить конкретные примеры (некоторые из них можно было бы назвать вопиющими), а ограничимся лишь замечанием о том, что на начальном этапе, то есть на этапе введения того или иного иностранного термина в отечественный оборот, следует гораздо более внимательно и продуманно подходить к этому вопросу. В качестве же положительного момента напомним читателю о первом выдающемся русском ученом М.В. Ломоносове, который не только внес огромный вклад в науку (будучи и государственным деятелем, и поэтом, и изобретателем), но и обогатил русский язык новыми научными терминами, новыми словами. Слово «равновесие» — один из самых известных примеров такого рода. Без этого точного перевода латинского термина не обходится не только отечественная наука, но и современный русский язык.

3. Закончив критиковать термин «аксиома» (на наш взгляд, более удачным было бы использовать слово «условие» для соответствующей ситуации), остановимся на математическом аспекте этой проблемы. Будучи более 30 лет связанными с тематикой геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий, будучи хорошо знакомыми со множеством работ современных геометров в данной области и, наконец, будучи авторами нескольких работ по данной тематике, мы возьмем на себя смелость сделать ряд выводов.

Во-первых, отметим, что в современной дифференциальной геометрии рассматриваются самые разнообразные виды аксиом (то есть характеристических условий) для почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий. Часть таких аксиом связана с внутренней геометрией гиперповерхностей, например со свойством эйнштейновости (вместе с частными случаями и обобщениями). Одним из первых примеров может служить работа [4].

Но гораздо чаще такого рода аксиомы связаны со свойствами вложения гиперповерхностей в объемлющее многообразие. Самый очевидный пример — когда аксиома требует, чтобы через каждую точку многообразия проходила вполне геодезическая гиперповерхность, или вполне омбилическая, или минимальная, или гиперповерхность с заданным типовым числом (в терминологии Такаги — Курихары). По этому поводу можно привести множество разнообразных примеров. Мы ограничимся лишь упоминанием исследования Л. В. Степановой [1] и обзора В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [5], которые содержат десятки таких примеров.

И наконец, самая важная, на наш взгляд, группа аксиом требует, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности почти эрмитова многообразия имела определенный вид. Например, принадлежала одному из наиболее важных в контактной геометрии классов почти контактных метрических структур: классу косимплектических, слабо косимплектических, сасакиевых, квазисасакиевых, кенмоцевых и т. п. структур. Непременно следует подчеркнуть, что наличие почти контактной метрической структуры определенного вида на гиперповерхности не может быть истолковано как внутреннее свойство гиперповерхности — такая почти контактная метрическая структура, как следует из дифференциально-геометрических построений В.Ф. Кириченко и Л.В. Степановой, порождается почти эрмитовой структурой на объемлющем многообразии [1]. Различные примеры, в которых аксиома требует, чтобы структура на гиперповерхности почти эрмитова многообразия принадлежала определенному классу почти контактных метрических структур, можно также найти в обзоре [5]. А вот работ, в которых исследуются более сложные случаи так называемых комбинированных аксиом (см., например, [4; 6; 7]), к сожалению, опубликовано не слишком много.

Второй важный пункт — это вопрос о том, насколько корректно наложение на почти эрмитово многообразие условия о прохождении через каждую его точку почти контактной метрической поверхности специального вида. Очевидно, что выполнение такого рода условий часто означает требование однородности и (или) изотропности многообразия, причем не в дифференциально-геометрическом, а в физическом смысле этих понятий. Если говорить о близкой нам тематике 6-мерных почти эрмитовых многообразий, то при рассмотрении подобных аксиом для 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой (не говоря уже о тривиальном примере келерова многообразия — комплексного евклидова пространства) вопросов не возникает. Однако некоторые почти эрмитовы 6-мерные многообразия устроены не столь просто. Например, приближенно келерова структура реализуется на произведении двух трехмерных сфер. А эрмитовым 6-мерным многообразием является многообразие так называемого скрученного произведения. Существуют и гораздо более сложные примеры.

Третье наше замечание, основанное на близком знакомстве со многими результатами в данной области, заключается в том, что выполнение той или иной аксиомы почти контактных метрических гиперповерхностей практически всегда существенно упрощает почти эрмитову структуру объемлющего многообразия. Например, структура Вайсмана — Грея может стать приближенно келеровой, структура класса G_2 может оказаться эрмитовой, а эрмитова структура — келеровой и т. д. Такого плана результаты, разумеется, часто выглядят весьма красиво, они влекут за собой множество интересных следствий, тесно связанных с фактами, ранее доказанными другими геометрами. В свете полученных результатов эти факты можно развивать, обобщать, детализировать. Но, с другой стороны, в этом случае выполнение той или иной аксиомы означает существенное обеднение теории более сложных классов почти эрмитовых многообразий в смысле изучения собственных представителей таких классов. К примеру, если многообразие Вайсмана — Грея (многообразие класса $W_1 \oplus W_4$ в терминологии Грея — Хервеллы [8]), удовлетворяющее некоторой аксиоме почти контактных метрических гиперповерхностей, окажется приближенно келеровым, то результат, полученный для такого многообразия, будет содержать не слишком много информации о геометрии собственных многообразий Вайсмана — Грея. Если еще учесть проблемы, изложенные выше, то подобные результаты уже не будут выглядеть столь значительными, как может показаться на первый взгляд.

4. Окончательный вывод, который следует из всего вышесказанного, таков: теория аксиом почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий нуждается в глубокой систематизации, основательной методической проработке, упорядочении вопросов терминологии и т. п.

Примером (на наш взгляд, отличным примером) преодоления определенного кризиса и своего рода наведения порядка в одном из разделов контактной геометрии стал выход в свет монографии Г. Питиша [9] о многообразиях Кенмоцу. Эта книга не только содержит практически все результаты в данной области, известные на момент ее опубликования; она также сняла многие методологические вопросы. Еще более известный пример наведения порядка такого рода, на этот раз в эрмитовой геометрии — уже упоминавшаяся нами статья А. Грея и Л. М. Хервеллы [8].

Авторы настоящей заметки выражают искреннюю благодарность Лидии Васильевне Степановой за полезные советы.

Список литературы

1. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М. , 1995.

2. *Кириченко В.Ф.* Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии // Доклады АН СССР. 1981. Т. 260, №4. С. 795—799.

3. *Vanhecke L.* The axiom of coholomorphic (2p+1)-spheres for some almost Hermitian manifolds // Tensor (N.S.). 1976. Vol. 30. P. 275—281.

4. *Lindt D. van, Verstraelen L.* Some axioms of Einsteinian and conformally flat hypersurfaces // J. Differ. Geom. 1981. Vol. 16. P. 205—212.

5. *Banaru M.B., Kirichenko V.F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, №4. P. 513—537.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT Journal of Mathematics. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A., Stepanova L.V.* Quasi-Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2020. Т. 93, №2. С. 68—75.

8. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

9. *Pitiş Gh.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publ. House Transilvania Univ. Braşov, 2007.

Для цитирования: *Абу-Салим А., Банару М.Б., Банару Г.А.* Заметка об аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 5—13. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-1.

MSC 2010: 53B25, 53C40

A. Abu-Saleem[1], M. B. Banaru[2], G. A. Banaru[2]
[1]Al al-Bayt University, Mafraq, Jordan
[2] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
[1] dr_ahmad57@yahoo.com, [2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-1

A note about almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds

Submitted on March 26, 2024

From 1950s, it is known that an almost contact metric structure is induced on an arbitrary oriented hypersurface in an almost Hermitian manifold. In accordance with the definition, an almost Hermitian manifold satisfies the axiom of almost contact hypersurfaces endowed with a some property, if an almost contact hypersurface with this property passes through every point of considered almost Hermitian manifold.

In the present note, we discuss some problems related to almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds. In particular, we select some special types of almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds. We mark out the axioms consisting of the conditions for the almost contact metric structure on the hypersurface of an almost Hermitian manifold to belong to a special class (for example, to the class of Sasakian or quasi-Sasakian structures). We also mark out the axioms that are related to the second fundamental form of the immersion of the almost contact metric hypersurface into an almost Hermitian manifold.

Keywords: almost contact metric structure, almost Hermitian manifold, almost contact metric hypersurfaces axioms, oriented hypersurface

References

1. *Stepanova, L. V.:* Contact geometry of hypersurfaces of Quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University V.I. Lenin (1995).

2. *Kirichenko, V.:* The axiom of holomorphic planes in generalized Hermitian geometry. Sov. Math. Dokl., 24, 336—341 (1981).

3. *Vanhecke, L.:* The axiom of coholomorphic $(2p+1)$-spheres for some almost Hermitian manifolds. Tensor (N. S.), 30, 275—281 (1976).

4. *Van Lindt, D., Verstraelen, L.:* Some axioms of Einsteinian and conformally flat hypersurfaces. J. Differ, Geom., 16, 205—212 (1981).

5. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. Journal of Mathematical Sciences (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT Journal of Mathematics, **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Abu-Saleem, A., Banaru, M.B., Banaru, G.A., Stepanova, L.V.:* Quasi-Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, **93**:2, 68—75 (2020).

8. *Gray, A., Hervella, L.M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

9. *Pitiş, Gh.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publ. House Transilvania Univ. Braşov (2007).

For citation: Abu-Saleem, A., Banaru, M.B., Banaru, G.A. A note about almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds. DGMF, 55 (1), 5—13 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-1.