ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Г.П.Бочилло

# К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ $m$-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ $n$-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

1.В работе изучаются распределения касательных элементов [1], порожденных $m$-мерными подмногообразиями гиперплоскостных элементов, на $(2n-1)$-мерном дифференцируемом многообразии $M_{2n-1}$ всех гиперплоских элементов $n$-мерного проективного пространства ( $m$-распределения $\Delta_m$ на многообразии $M_{2n-1}$ ( $m<n$ ).Гиперплоским элементом $\{A,\alpha\}$ названа пара из точки $A$ и инцидентной ей гиперплоскости $\alpha$ пространства $P_n$ [2].С помощью компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения $\Delta_m$ строится инвариантное оснащение распределения $\Delta_m$ ,которое индуцирует на $\Delta_m$ аффинную связность с кручением.В работе доказано,что оснащение распределения $\Delta_m$ может быть построено с использованием компонент фундаментального подобъекта второго порядка одного из $(m-1)$-распределений,порождаемых $\Delta_m$ на $M_{2n-1}$. Оснащение распределения $\Delta_m$ полем гиперплоских элементов означает задание на $M_{2n-1}$ единственного поля невырожденных гиперквадрик.

В работе индексы принимают следующие значения:
$I,J,K=0;\overline{1,n}$; $i,j,k=\overline{1,n}$; $p,q,r=\overline{1,n-1}$;
$u,v,w,w_1=\overline{1,m-1}$; $\bar u,\bar v,\bar w=\overline{m,n-1}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m-1},n$.

2.Присоединим к каждому элементу $\{A,\alpha\}$ многообразия $M_{2n-1}$ точечный $R_0=\{A_I\}$ и тангенциальный $\tau^0=\{\alpha^I\}$ подвижные реперы,полагая $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$, причем $dA_I=\omega_I^J A_J$, $d\alpha^I=-\omega_J^I\alpha^J$, где 1-формы $\omega_I^J$ удовлетворяют условиям:

$$d\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J,\quad \omega_0^0+\omega_1^1+\ldots+\omega_n^n=0.$$



Рассмотрим расслоение линейных реперов [3] $L(M_{2n-1})$ с базой $M_{2n-1}$ ,типовым слоем- подгруппой стационарности гиперплоскостного элемента $\{A,\alpha\}$ и следующими структурными уравнениями:

$$d\omega_0^p=\omega_0^q\wedge(\omega_q^p-\delta_q^p\omega_0^0)+\omega_0^n\wedge\omega_n^p,\quad d\omega_0^n=\omega_0^q\wedge\omega_q^n+\omega_0^n\wedge(\omega_n^n-\omega_0^0),$$

$$d\omega_p^n=\omega_0^n\wedge(-\omega_p^0)+\omega_q^n\wedge\{\delta_q^p(\omega_n^n-\omega_0^0)-(\omega_p^q-\delta_p^q\omega_0^0)\},$$

$$d(\omega_q^p-\delta_q^p\omega_0^0)=(\omega_q^r-\delta_q^r\omega_0^0)\wedge(\omega_r^p-\delta_r^p\omega_0^0)+\omega_q^n\wedge\omega_n^p+\delta_q^p\omega_n^0\wedge\omega_0^n,\tag{1}$$

$$d(\omega_n^n-\omega_0^0)=-\omega_p^0\wedge\omega_0^p+\omega_n^p\wedge\omega_p^n+2\omega_n^0\wedge\omega_0^n,$$

$$d\omega_n^p=\omega_n^0\wedge\omega_0^p+\omega_n^q\wedge(\omega_q^p-\delta_q^p\omega_0^0),\quad d\omega_p^0=(\omega_p^q-\delta_p^q\omega_0^0)\wedge\omega_q^0+\omega_p^n\wedge\omega_n^0,$$

$$d\omega_n^0=\omega_n^0\wedge(\omega_0^0-\omega_n^n)+\omega_n^p\wedge\omega_p^0.$$

Из вида этих уравнений заключаем,что структурные формы $L(M_{2n-1})$ не удовлетворяют теореме Картана-Лаптева [3]и, следовательно,на $L(M_{2n-1})$ не определяют фундаментально-групповой связности.

Обозначим $\{N,\nu\}$ гиперплоский элемент из точки $N$ ,не инцидентной $\alpha$, и гиперплоскости $\nu$ ,не содержащей $A$ . Имеет место

Т е о р е м а 1.Оснащение $M_{2n-1}$ полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$ означает задание аффинной связности на $L(M_{2n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Пусть к каждому $\{A,\alpha\}$ многообразия $M_{2n-1}$ присоединен гиперплоский элемент $\{N,\nu\}$ такой,что

$$N=A_n+a_n^p A_p+a_n^0 A_0,\quad \nu=\alpha^0+b_p^0\alpha^p+b_n^0\alpha^n,\quad b_n^0=-(a_n^p b_p^0+a_n^0),\tag{2}$$

причем выполнены условия:

$$\nabla a_n^p+\omega_n^p=a_{ni}^p\omega_0^i+a_n^{pq}\omega_q^n,\quad \nabla a_n^0+\omega_n^0=a_{ni}^0\omega_0^i+a_n^{0q}\omega_q^n,$$
$$\nabla b_p^0-\omega_p^0=b_{pi}^0\omega_0^i+b_p^{0q}\omega_q^n,\quad \nabla b_n^0-\omega_n^0=b_{ni}^0\omega_0^i+b_n^{0q}\omega_q^n,\tag{3}$$

где $\nabla$ -известный символ [3] ковариантного дифференцирования.Перейдем к новому точечному реперу $\{B_I\}$,где $B_0=A_0$ $B_p=A_p-b_p^0A_0$, $B_n=N$ и $dB_I=\Omega_I^J B_J$,

$$d\Omega_J^J=\Omega_J^K\wedge\Omega_K^J,\quad \Omega_0^0+\Omega_1^1+\ldots+\Omega_n^n=0.$$

Формы $\Omega_p^0, \Omega_n^p, \Omega_n^0$ в силу (3) выражаются лишь через базовые формы расслоения $L(M_{2n-1})$, а остальные 1-формы $\Omega_J^J$ имеют следующий вид:

$$\Omega_0^p=\omega_0^p-a_n^p\omega_0^n,\ \Omega_0^n=\omega_0^n,\ \Omega_p^n=\omega_p^n-b_p^0\omega_0^n,\ \Omega_p^q=\omega_p^q-a_n^q\Omega_p^n-$$
$$-b_p^0\omega_0^q,\ \Omega_n^n=\omega_n^n-a_n^p\omega_p^n+a_n^0\omega_0^n,\ \Omega_0^0=\omega_0^0+b_p^0\Omega_0^p+b_n^0\omega_0^n. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) внешним образом, получаем, что система форм

$$\Omega_0^p;\Omega_0^n,\Omega_p^n,\Omega_p^q-\delta_p^q\Omega_0^0,\Omega_n^n-\Omega_0^0 \tag{5}$$

удовлетворяет условиям теоремы Картана-Лаптева. Следовательно, система форм (5) определяет на $L(M_{2n-1})$ аффинную связность. Из уравнений структуры для форм (5) заключаем, что это связность с кручением.

3. Покажем, как в случае распределения $\Delta_m$ на $M_{2n-1}$ $(m<n)$ определяется внутренним образом оснащающее его поле гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$.

Система уравнений, ассоциированная [1] с распределением $\Delta_m$, в репере первого порядка $R_1$ может быть записана в виде:

$$\omega_0^{\bar{u}}=0,\ \omega_{\bar{u}}^n=0,\ \omega_u^n=\Lambda_{uv}^n\omega^v,\ (\det\|\Lambda_{uv}^n\|\neq 0) \tag{6}$$

Используя (6), получаем систему дифференциальных уравнений распределения $\Delta_m$:

$$\omega_\alpha^{\bar{u}}=\Lambda_{0\alpha i}^{\bar{u}}\omega^i+\Lambda_0^{\bar{u}p}\omega_p^n,\ \Lambda_{uv}^n\omega_{\bar{u}}^u=\Lambda_{\bar{u}vi}^n\omega^i+\Lambda_{\bar{u}v}^{np}\omega_p^n,$$

$$\omega_{\bar{u}}^0=\Lambda_{\bar{u}ni}^n\omega^i+\Lambda_{\bar{u}n}^{np}\omega_p^n,\ \nabla\Lambda_{uv}^n+\Lambda_{uv}^n\omega_0^0=\Lambda_{uvi}^n\omega^i+\Lambda_{uv}^{np}\omega_p^n, \tag{7}$$

$$\Lambda_{uv}^n\omega_n^v+\omega_n^0=\Lambda_{uni}^n\omega^i+\Lambda_{un}^{np}\omega_p^n,\ (\omega_0^i\equiv\omega^i).$$

Нетрудно показать, что задание распределения $\Delta_m$ на $M_{2n-1}$ эквивалентно заданию на $M_{2n-1}$ поля $m$-пар $\{L_m, \ell_{n-m-1}\}$, а также отображения между прямыми в $L_m$, инцидентными $A_0$, и $(n-2)$-плоскостями в $\alpha^n$, инцидентными $\ell_{n-m-1}$. Справедлива



Т е о р е м а 2. Оснащение распределения $\Delta_m$ полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$ может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения $\Delta_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения (7) и их дифференциальные продолжения, получаем, что система величин $\gamma_1=\{\Lambda_{uv}^n, \Gamma_{0\alpha\beta}^{\bar{u}}, \Gamma_{\bar{u}\alpha\beta}^n, \Gamma_{u\alpha\beta}^n\}$, где $\Gamma_{0\alpha\beta}^{\bar{u}}=\Lambda_{0\alpha\beta}^{\bar{u}}+\Lambda_{0\alpha}^{\bar{u}v}$, $\Gamma_{\bar{u}\alpha\beta}^n=\Lambda_{\bar{u}\alpha\beta}^n+\Lambda_{\bar{u}\alpha}^{nv}\Lambda_{v\beta}^n$, $\Gamma_{u\alpha\beta}^n=\Lambda_{u\alpha\beta}^n+\Lambda_{un}^{nv}\Lambda_{v\beta}^n$ образует самостоятельный объект, который является подобъектом фундаментального объекта первого порядка $\Gamma_1=\{\Lambda_{uv}^n;\Lambda_{0\alpha i}^{\bar{u}};\Lambda_{0\alpha}^{\bar{u}p};\Lambda_{\bar{u}\alpha i}^n;\Lambda_{\bar{u}\alpha}^{np};\Lambda_{u\alpha i}^n;\Lambda_{u\alpha}^{np}\}$ распределения $\Delta_m$. Согласно [4] $\gamma_1$-фундаментальный подобъект распределения $\Delta_m$. Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка распределения $\Delta_m$ $\gamma_2=\{\gamma_1, \Gamma_{0\alpha\beta\gamma}^{\bar{u}}, \Gamma_{\bar{u}\alpha\beta\gamma}^n, \Gamma_{u\alpha\beta\gamma}^n\}$. Используя компоненты $\gamma_2$, выберем точку $N$ и гиперплоскость $\nu$ так, что

$$a_n^u=-A_{nw}A^{wu},\ a_n^{\bar{u}}=0,\ a_n^0=-\frac{1}{m-1}(a_{nu}^u+a_n^u a_n^v\Lambda_{uv}^n+a_n^{uv}\Lambda_{vu}^n),$$

$$b_u^0=\Lambda_{uv}^n a_n^v,\ b_{\bar{u}}^0=0,\ b_n^0=-(a_n^u b_u^0+a_n^0),$$

где $$A_{\alpha\beta}=\Lambda_n^{uv}\Gamma_{0u(\alpha}^{\bar{u}}\Gamma_{|\bar{u}|\beta)v}^n,\ A^{uw}A_{wv}=\delta_v^u,\ \Lambda_n^{wv}\Lambda_{uw}^n=\Lambda_n^{wv}\Lambda_{wu}^n=\delta_u^v,$$

$$\det\|A_{\alpha\beta}\|\neq 0,\ A_{nn}-A_{vn}A_{nu}A_{uv}\neq 0,$$

причем $\nabla A_{\alpha\beta}+A_{\alpha\beta}(\omega_0^0+\omega_n^n)=A_{\alpha\beta i}\omega^i+A_{\alpha\beta}^p\omega_p^n.$

4. Распределение $\Delta_m$ порождает на $M_{2n-1}$ несколько новых распределений, например, подраспределение $\Delta_{m-1}^*$, ассоциированная с которым система

$$\omega_0^{\bar{u}}=0,\quad \omega_{\bar{u}}^n=0,\quad \omega_u^n-\Lambda_{uv}^n\omega^v=0,\quad \omega_0^n=0$$

относительно инвариантна в силу (7). Совокупность величин $\gamma_1^*=\{\Lambda_{uv}^n, \Gamma_{0uv}^{\bar{u}}, \Gamma_{\bar{u}uv}^n, \Gamma_{uvw}^n\}$ образует подобъект $\gamma_1$, который будем называть, следуя [4], фундаментальным подобъектом первого порядка подраспределения $\Delta_{m-1}^*$. Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка подраспределения $\Delta_{m-1}^*$: $\gamma_2^*=\{\gamma_1^*, \Gamma_{0uvw}^{\bar{u}}, \Gamma_{\bar{u}uvw}^n, \Gamma_{uvww_1}^n\}$. Имеет место

Т е о р е м а 3. Оснащение распределения $\Delta_m$ полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$ может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка подраспределения $\Delta^*_{m-1}$.

Доказательство. Используя компоненты $\gamma^*_1$, построим $m$-распределение $\Delta^*_m$ на $M_{2n-1}$, ассоциированная с которым система имеет вид:

$$\omega^{\bar u}_o = \frac{1}{m-1}\Gamma^{\bar u u}_{ou}\,\omega^n_o\,,\quad \omega^n_{\bar u} = \frac{1}{m-1}\Gamma^{nu}_{\bar u u}\,\omega^n_o\,,\quad \omega^n_u = \Lambda^n_{uv}\,\omega^v, \tag{8}$$

где $\Gamma^{\bar u v}_{ou} = \Gamma^{\bar u}_{ouw}\Lambda^{wv}_n\,,\ \Gamma^{nv}_{\bar u u} = \Gamma^n_{\bar u uw}\Lambda^{wv}_n$.

Система (8) относительно инвариантна в силу той части системы (7), которая задает подраспределение $\Delta^*_{m-1}$ и $\gamma^*_2$. Далее, для построения оснащения $\Delta_m$ надо использовать результат теоремы 2, применив его к $\Delta^*_m$.

5. Рассмотрим на $M_{2n-1}$ поле невырожденных гиперквадрик, каждая из которых в локальном репере $R_1$ определена уравнениями $g_{\jmath\jmath}x^{\jmath}x^{\jmath}=0$, причем

$$\nabla g_{\jmath\jmath} + g_{\jmath\jmath}(\omega^o_o + \omega^n_n) = g_{\jmath\jmath k}\,\omega^k_o + g^p_{\jmath\jmath}\,\omega^n_p. \tag{9}$$

Назовем взаимным к $\Delta^*_{m-1}$ относительно распределения $\Delta_m$ на $M_{2n-1}$ такое распределение $\Delta^*_{n-m}$, порождаемое $\Delta_m$, ассоциированная система которого имеет вид

$$\omega^u_o = 0,\quad \omega^n_u = 0,\quad \omega^n_o = 0\,,\quad \omega^n_{\bar u} = a_{\bar u\bar v}\,\omega^{\bar v}_o, \tag{10}$$

где $a_{\bar u\bar v} = -\Lambda^n_{\bar v n\bar u} - \Lambda^{uv}_n\Lambda^{\bar w}_{ou\bar u}\Lambda^n_{\bar w v\bar v}$

Система (10) относительно инвариантна в силу уравнений (7) и их 1-го продолжения.

Теорема 4. Существует и притом единственное поле невырожденных гиперквадрик, имеющих соприкосновение второго порядка с подраспределением $\Delta^*_{m-1}$, а также с взаимным ему относительно $\Delta_m$ распределением $\Delta^*_{n-m}$. Элементы $A_o$ и $\alpha^n$, $L_m$ и $\ell_{n-m-1}$, $L^*_{m-1}$ и $\ell^*_{n-m}$ всех трех распределений, а также $N$ и $\nu$ оснащающего гиперплоского элемента полярно сопряжены относительно гиперквадрики поля ($L^*_{m-1} = L_m \cap \alpha^n$, $\ell^*_{n-m} = [A_o\ell_{n-m-1}]$).

Доказательство. Требуя выполнения сформулированных в теореме условий, получаем

$$g_{oo} = 0\,,\ g_{ou} = 0\,,\ g_{o\bar u} = 0\,,\ g_{on} = -1\,,\ g_{uv} = \Lambda^n_{(uv)}\,,$$



$$g_{vn} = -a^v_n\Lambda^n_{[uv]}\,,\ g_{\bar u\bar v} = a_{(\bar u\bar v)}\,,\ g_{nn} = 2a^o_n - \Lambda^n_{(uv)}a^u_n\,,\ g_{v\bar u} = 0.$$

Указанная система величин удовлетворяет уравнениям типа (9).

## Список литературы


1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов. - Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, с.29-48

2. Онищук Н.М. Распределения $\Delta_m$ на многообразии всех гиперплоских элементов $n$-мерного центроаффинного пространства $(m<n)$. Геометр.сб. Томск, 1979 Вып.18, с.59-71.

3. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Учебное пособие. Калинин, 1977.

4. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.. Распределения $m$-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, I. -Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, с.49-94.